

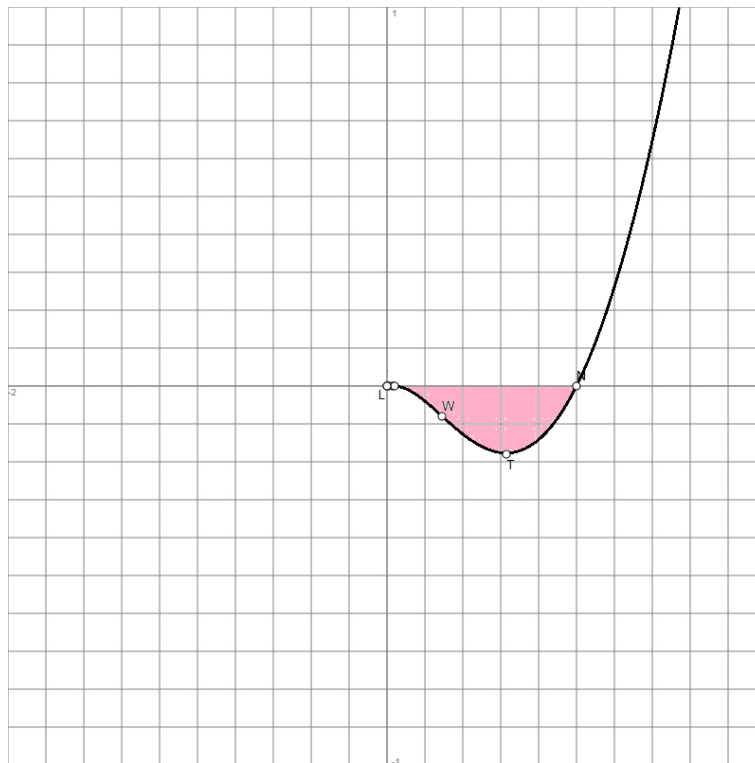
Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Berechne das (uneigentliche) Integral

$$\int_0^1 x^2 \cdot \sin(\ln(x)) dx.$$



Lösung: I. Zunächst wird die Stammfunktion des Integranden $f(x) = x^2 \cdot \sin(\ln(x))$ bestimmt. Dies geschieht zunächst mittels Substitution, dann vermöge der Produktintegration (partielle Integration). Wir berechnen mit der Substitutionsregel:

$$\int x^2 \cdot \sin(\ln(x)) dx = \int x^3 \cdot \sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} z = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^z \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\}}{=} \int (e^z)^3 \cdot \sin(z) dz = \int e^{3z} \cdot \sin(z) dz$$

und haben dann mit der Produktregel die Umformungen:

$$\int e^{3z} \cdot \sin(z) dz \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u' = e^{3z} \Rightarrow u = \frac{1}{3} e^{3z} \\ v = \sin(z) \Rightarrow v' = \cos(z) \end{array} \right\}}{=} \frac{1}{3} e^{3z} \cdot \sin(z) - \int \frac{1}{3} e^{3z} \cdot \cos(z) dz =$$

$$\frac{1}{3} e^{3z} \cdot \sin(z) - \frac{1}{3} \int e^{3z} \cdot \cos(z) dz \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u' = e^{3z} \Rightarrow u = \frac{1}{3} e^{3z} \\ v = \cos(z) \Rightarrow v' = -\sin(z) \end{array} \right\}}{=} \frac{1}{3} e^{3z} \cdot \sin(z) - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3z} \cdot \cos(z) - \int \frac{1}{3} e^{3z} \cdot (-\sin(z)) dz \right] =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}e^{3z} \cdot \sin(z) - \frac{1}{9}e^{3z} \cdot \cos(z) - \frac{1}{9} \int e^{3z} \cdot \sin(z) dz &\Rightarrow \\ \int e^{3z} \cdot \sin(z) dz = \frac{1}{3}e^{3z} \cdot \sin(z) - \frac{1}{9}e^{3z} \cdot \cos(z) - \frac{1}{9} \int e^{3z} \cdot \sin(z) dz &\Rightarrow \\ \frac{10}{9} \int e^{3z} \cdot \sin(z) dz = \frac{1}{3}e^{3z} \cdot \sin(z) - \frac{1}{9}e^{3z} \cdot \cos(z) &\stackrel{\cdot \frac{10}{9}}{\Rightarrow} \\ \int e^{3z} \cdot \sin(z) dz = \frac{3}{10}e^{3z} \cdot \sin(z) - \frac{1}{10}e^{3z} \cdot \cos(z) = \frac{e^{3z}}{10}(3 \sin(z) - \cos(z)). \end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt die Stammfunktion:

$$\frac{e^{3z}}{10}(3 \sin(z) - \cos(z)) \Big|_{\{x=e^z \leftrightarrow z=\ln(x)\}} = \frac{x^3}{10}(3 \sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) = F(x).$$

II. Es liegt mit $\int_0^1 x^2 \cdot \sin(\ln(x)) dx$ ein uneigentliches Integral 2. Art vor. Bei $x = 0$ besitzt der Integrand $f(x) = x^2 \cdot \sin(\ln(x))$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle, unendlich viele Nullstellen von $f(x)$ häufen sich um die Lücke $L(0|0)$. Wir nähern uns dem Wert des uneigentlichen Integrals durch einen Grenzprozess von bestimmten Integralen wie folgt an:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0+} \int_r^1 x^2 \cdot \sin(\ln(x)) dx &= \lim_{r \rightarrow 0+} \left[\frac{x^3}{10}(3 \sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) \right]_r^1 = \\ \frac{1^3}{10}(3 \sin(\ln(1)) - \cos(\ln(1))) - \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{r^3}{10}(3 \sin(\ln(r)) - \cos(\ln(r))) &= \frac{1}{10}(3 \sin(0) - \cos(0)) - 0 = \\ \frac{1}{10}(0 - 1) &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

bei existierendem Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{r^3}{10}(3 \sin(\ln(r)) - \cos(\ln(r))) = 0$ wegen der Beschränktheit der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus ($-1 \leq \sin(z), \cos(z) \leq 1$). Damit gilt für den Integralwert:

$$\int_0^1 x^2 \cdot \sin(\ln(x)) dx = -\frac{1}{10}.$$