

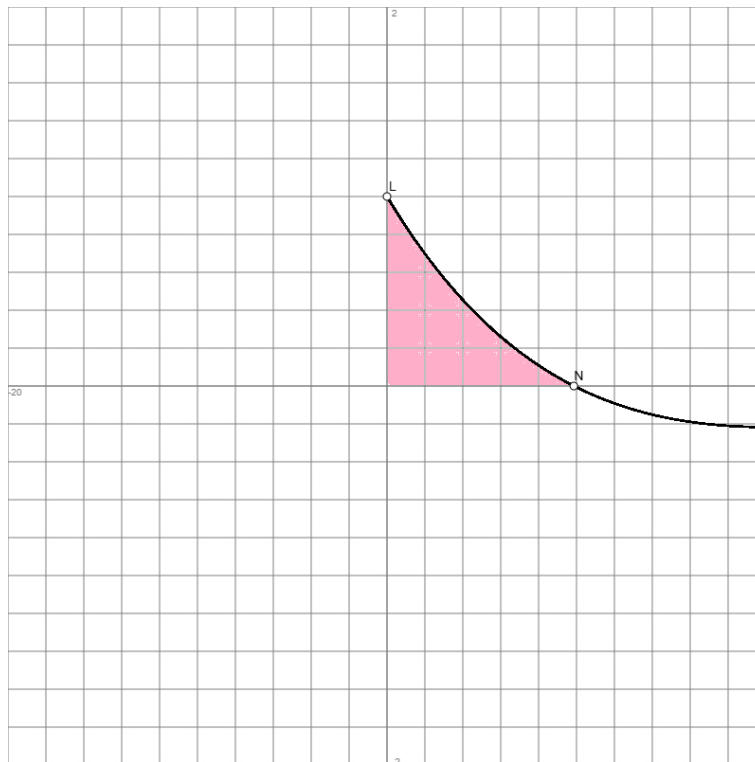
Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Berechne das (uneigentliche) Integral

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$



Lösung: I. Zunächst wird die Stammfunktion des Integranden $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ bestimmt. Dies geschieht zunächst mittels Substitution. Wir berechnen mit der Substitutionsregel:

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx \stackrel{u=\sqrt{x}}{=} \int \sin(u) \cdot 2du = 2 \int \sin(u) du = -2 \cos(u) \stackrel{u=\sqrt{x}}{=} -2 \cos(\sqrt{x}).$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array} \right\}$

II. Es liegt mit $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ ein uneigentliches Integral 2. Art vor. Bei $x = 0$ besitzt der Integrand $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle mit Lücke $L(0|1)$. Wir nähern uns dem Wert des uneigentlichen Integrals durch einen Grenzprozess von bestimmten Integralen wie folgt an:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0+} \int_r^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{r \rightarrow 0+} \left[-2 \cos(\sqrt{x}) \right]_r^{\pi^2} = -2 \cos(\sqrt{\pi^2}) - \lim_{r \rightarrow 0+} \left[-2 \cos(\sqrt{r}) \right] = \\ &= -2 \cos(\pi) + 2 \lim_{r \rightarrow 0+} \cos(\sqrt{r}) = -2 \cos(\pi) + 2 \cos(0) = -2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Kosinus- und Wurfelfunktion. Damit gilt für den Integralwert:

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4.$$