

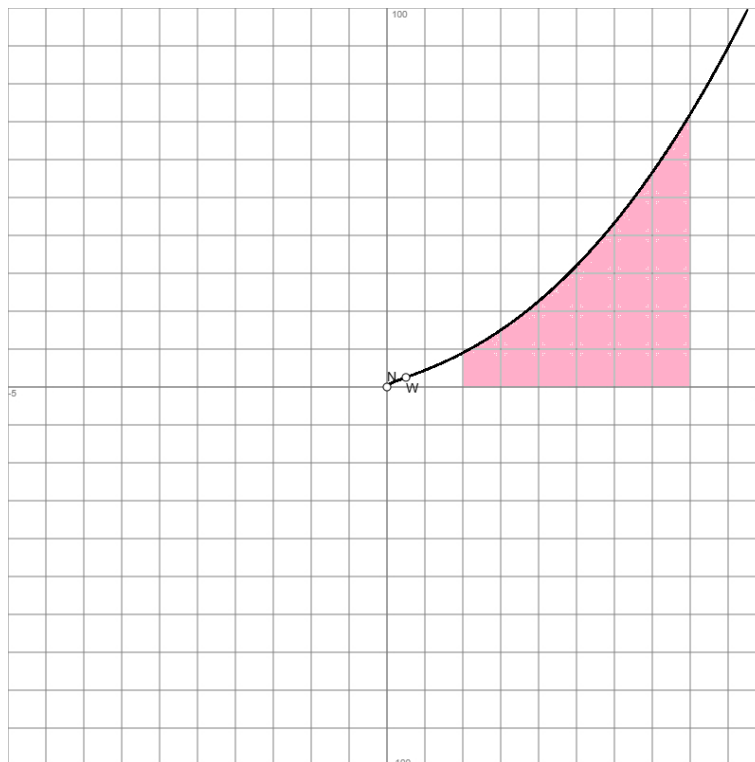
Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^4 (x+2)^2 \sqrt{x} dx.$$



Lösung: I. Zunächst wird der Integrand (mit Hilfe der 1. binomischen Formel) ausgerechnet:

$$f(x) = (x+2)^2 \sqrt{x} = (x^2 + 4x + 4) \sqrt{x} = x^2 \sqrt{x} + 4x \sqrt{x} + 4 \sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}.$$

II. Integration ergibt nach der Summen-, Faktor- und Potenzregel für das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} \int_1^4 (x+2)^2 \sqrt{x} dx &= \int_1^4 \left(x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \\ &= \left(\frac{2}{7} \cdot 4^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{2}{7} \cdot 1^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{5} \cdot 1^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} \right) = \left(\frac{2}{7} \cdot 128 + \frac{8}{5} \cdot 32 + \frac{8}{3} \cdot 8 \right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{8}{5} + \frac{8}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{7} \cdot 127 + \frac{8}{5} \cdot 31 + \frac{8}{3} \cdot 7 = \frac{254}{7} + \frac{248}{5} + \frac{56}{3} = \frac{10978}{105} \approx 104,55. \end{aligned}$$

Es gilt damit:

$$\int_1^4 (x+2)^2 \sqrt{x} dx = \frac{10978}{105} \approx 104,55.$$