

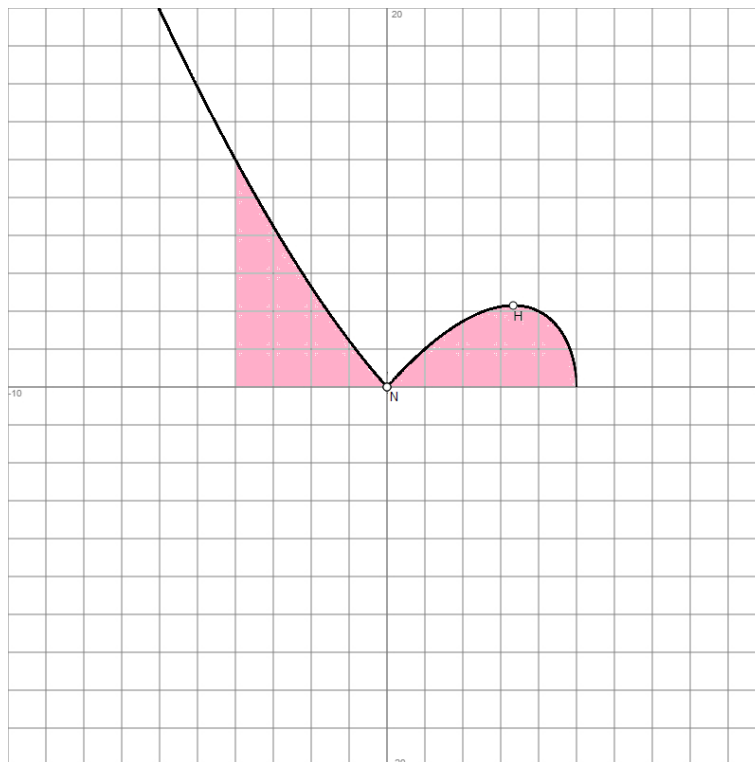
Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-4}^5 \sqrt{5x^2 - x^3} dx.$$



Lösung: I. Zunächst seien einige allgemeine Hinweise angeführt. Für eine integrierbare Funktion $f(x)$ gilt hinsichtlich des Integrationsbereichs:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a \leq c \leq b.$$

Weiter ist die Substitutionsregel für das Integrieren gültig:

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u) du$$

mit: $x = g(u)$, $du = g'(u) du$ bzw.:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

mit: $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$.

Schließlich ist die Integrierbarkeit einer Funktion $f(x)$ auch dann gewährleistet, wenn sie fast überall stetig ist, d.h.: die Funktion kann durchaus im Integrationsbereich über Stellen verfügen, an denen sie nicht stetig oder stetig, aber nicht differenzierbar ist. Beim in der Aufgabenstellung vorgegebenen Integranden $f(x) = \sqrt{5x^2 - x^3}$ liegt die nicht differenzierbare Stelle $x = 0$ vor.

II. Wir berechnen das bestimmte Integral auch unter Umformung des Integranden $f(x) = \sqrt{5x^2 - x^3} = \sqrt{x^2(5-x)} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{5-x} = |x|\sqrt{5-x}$ (*), unter Berücksichtigung der Betrags-

funktion $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ und unter Verwendung der Substitutionsregel für das Integrieren:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^5 \sqrt{5x^2 - x^3} dx &= \int_{-4}^5 |x|\sqrt{5-x} dx = \int_{-4}^0 |x|\sqrt{5-x} dx + \int_0^5 |x|\sqrt{5-x} dx = \int_{-4}^0 -x\sqrt{5-x} dx + \int_0^5 x\sqrt{5-x} dx = \\ &= -\int_{-4}^0 x\sqrt{5-x} dx + \int_0^5 x\sqrt{5-x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u=5-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow -du=dx \\ x=-4 \Rightarrow u=9 \\ x=0 \Rightarrow u=5 \\ x=5 \Rightarrow u=0 \end{array} \right\} = -\int_9^5 (5-u)\sqrt{u}(-du) + \int_5^0 (5-u)\sqrt{u}(-du) = \\ &= -\int_5^9 (5-u)\sqrt{u} du + \int_0^5 (5-u)\sqrt{u} du = -\int_5^9 (5\sqrt{u} - u\sqrt{u}) du + \int_0^5 (5\sqrt{u} - u\sqrt{u}) du = \\ &= -\int_5^9 \left(5u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right) du + \int_0^5 \left(5u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right) du = -\left[5 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]_5^9 + \left[5 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]_0^5 = \\ &= -\left(5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 9^{\frac{5}{2}} \right) + \left(5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 5^{\frac{5}{2}} \right) + \left(5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 5^{\frac{5}{2}} \right) - \left(5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 0^{\frac{5}{2}} \right) = \\ &= -\left(\frac{10}{3} \cdot 27 - \frac{2}{5} \cdot 243 \right) + 2 \left(\frac{10}{3} \cdot 5\sqrt{5} - \frac{2}{5} \cdot 25\sqrt{5} \right) - 0 = -(90 - 97,2) + 2 \left(\frac{50}{3} \sqrt{5} - 10\sqrt{5} \right) = \\ &= 7,2 + 2 \cdot \frac{20}{3} \sqrt{5} = 7,2 + \frac{40}{3} \sqrt{5} \approx 37,014. \end{aligned}$$

Da bei der Substitution auch die Integralgrenzen entsprechend verändert wurden, war keine Rücksubstitution notwendig. Es gilt damit:

$$\int_{-4}^5 \sqrt{5x^2 - x^3} dx = 7,2 + \frac{40}{3} \sqrt{5} \approx 37,014.$$