

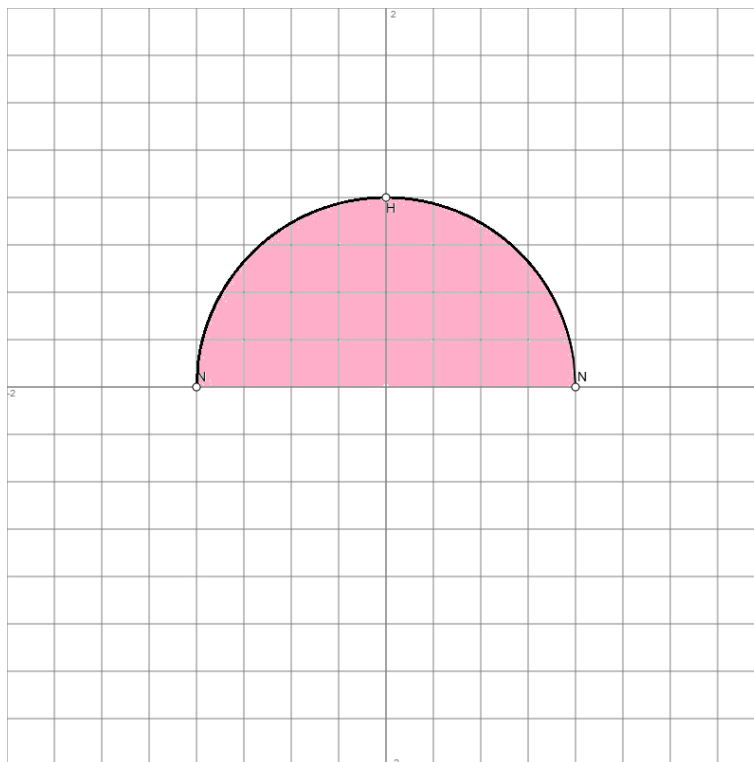
Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx .$$



Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Produktintegration:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx .$$

Weiter ist die Substitutionsregel für das Integrieren gültig:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: $x = g(u)$, $du = g'(u)du$ bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

II. Die Verwendung der Produktintegration und der trigonometrischen Formel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ führt dann auf das unbestimmte Integral des quadratischen Kosinus. Zunächst folgt:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx \stackrel{\substack{u' = \cos x \Rightarrow u = \sin x \\ v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x}}{=} \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x) dx =$$

$$\sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \sin x \cdot \cos x + \int 1 dx - \int \cos^2 x dx =$$

$$\sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx.$$

Die Gleichung

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx$$

lässt sich dann noch umstellen:

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx \quad | + \int \cos^2 x dx$$

$$2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x \quad | :2$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x = \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{2}.$$

III. Wir berechnen das bestimmte Integral $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ unter Verwendung der Substitutionsregel und der Produktintegration gemäß II.:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{\substack{x=\sin u \Rightarrow u=\arcsin x \\ dx=\cos u \Rightarrow dx=\cos u du \\ \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow u=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2} \\ x=1 \Rightarrow u=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2} \end{array} \right\}}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u \cdot du \stackrel{\sin^2 u + \cos^2 u = 1}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \cos u \cdot du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \cdot du \stackrel{II.}{=}$$

$$\left[\frac{u + \sin u \cdot \cos u}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \right) - \left(\frac{-\frac{\pi}{2} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} \right) =$$

$$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Da bei der Substitution auch die Integralgrenzen entsprechend verändert wurden, war keine Rücksubstitution notwendig. Es gilt damit:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

IV. Der Wert des bestimmten Integral $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ist identisch mit dem Flächeninhalt eines Halb-

kreises mit Radius $r = 1$; auch von daher ergibt sich: $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}.$

www.michael-buhlmann.de / 09.2025 / Aufgabe 2504