

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

1. Lösung: I. Uneigentliche Integrale hängen mit „uneigentlichen“, weil unendlichen (unendlich langen, unendlich hohen) Flächen zusammen und ergeben sich, wenn auf einem endlichen Intervall $[a; b]$ eine Funktion $f(x)$ unbeschränkt ist (also eine Polstelle besitzt) oder wenn das Intervall als Integrationsbereich einer (beschränkten) Funktion $f(x)$ unendliche Länge hat, also von der Form $[a; \infty)$ oder $(-\infty; a]$ oder $(-\infty; \infty)$ ist. In jedem Fall führt man gegen die Unendlichkeitsstelle (hier: $x_0 = a$) oder gegen $\pm\infty$ (hier: $+\infty$) einen Grenzprozess durch, d.h. für hier angenommene auf dem Intervall nicht negative Funktionen $f(x)$ ergibt sich – die Existenz endlicher Grenzwerte vorausgesetzt – die (somit endliche) Fläche A als Grenzwert „eigentlicher“ („Näherungs-“) Flächen $A(u)$ und somit als:

$$A(u) = \int_u^b f(x) dx = [F(x)]_u^b = F(b) - F(u) \xrightarrow{u \rightarrow a} A = \int_a^b f(x) dx$$

im Fall der Polstelle $x_0 = a$ mit reellem u mit $b > u > a$ bzw.

$$A(u) = \int_a^u f(x) dx = [F(x)]_a^u = F(u) - F(a) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} A = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

im Fall des unendlich großen Integrationsbereichs mit reellem u mit $u > a$.

Wichtig ist noch, wenn eine Funktion $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ gegen eine Asymptote y läuft; die unendlich lange Fläche ergibt sich hier als (endliche) Fläche zwischen Funktion und Asymptote.

II. Die (quadratische Hyperbel-) Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist wegen der senkrechten Asymptote (Polstelle) bei $x = 0$ auf dem Intervall $[1; \infty)$ als Integrationsbereich definiert und dort integrierbar. Das

uneigentliche Integral (1. Art) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ existiert wegen der folgenden Überlegungen:

Für die Funktion $f(x)$ ist der Grenzprozess nach Einführung von u mit $u > 0$ durchzuführen:

$$A(u) = \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \int_1^u x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = -\frac{1}{u} - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{u} + 1 \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0 + 1 = 1 = A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

2. Lösung: I. Für eine integrierbare Funktion $f(x)$ gilt hinsichtlich des Integrationsbereichs $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

II. Für das Integrieren ist die Substitutionsregel gültig:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: $x = g(u)$, $du = g'(u)du$ bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

III. Wir wenden auf das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ die Substitutionsregel an, so dass ein übli-

ches bestimmtes Integral entsteht. Dies geschieht mittels der Variablentransformation $u = \frac{1}{x}$, so

dass der x-Integrationsbereich $[1; \infty)$ zum u-Integrationsbereich $[0; 1]$ mit endlichen Intervallgrenzen wird. Der Grenzprozess beim uneigentlichen Integral „verschwindet“, wenn wir die neuen Integralgrenzen betrachten:

$$x = 1 \Rightarrow u = 1$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \text{ (oder: } x = +\infty \Rightarrow u = 0 \text{)}.$$

Das dadurch gebildete bestimmte Integral kann ohne Grenzprozess berechnet werden.

IV. Für den Wert des uneigentlichen Integrals als bestimmtes Integral ergibt sich damit:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{du} = \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{u^2} du = \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2} du = \int_1^{\infty} u^{-2} du = \left[-u^{-1} \right]_1^{\infty} = \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1.$$