

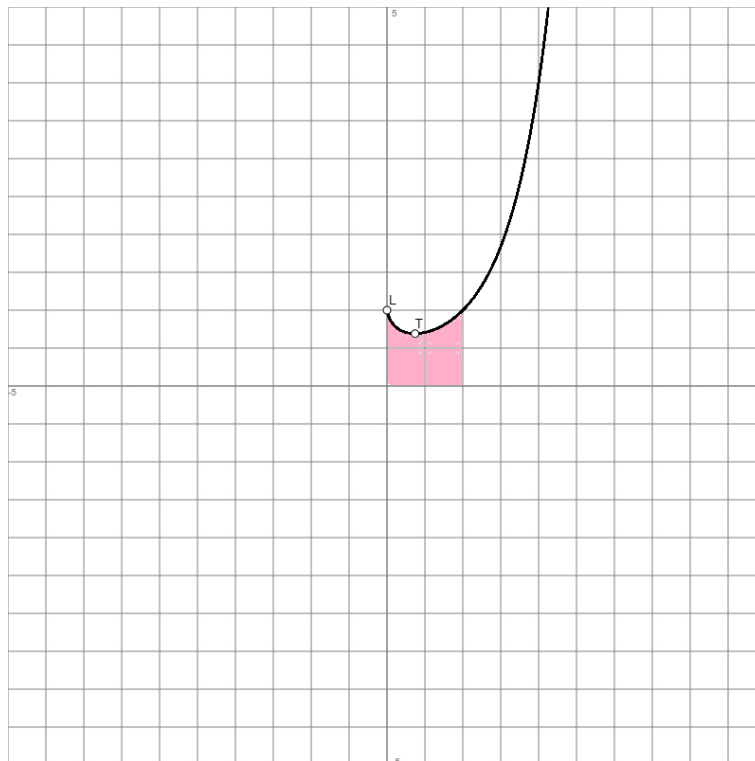
Mathematikaufgaben

> Analysis

> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 x^x dx.$$



Lösung: I. Wir verweisen zuerst auf die Potenzreihe der Exponentialfunktion $y = e^z$:

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}, \quad z \text{ beliebig reell.}$$

II. Weiter gilt die Integralformel für das uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

etwa auf Grund des nachstehenden Feynman-Tricks:

Eine dem Integral $\int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p, x) = x^p$, so dass

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \cdot 1^{p+1} - \frac{1}{p+1} \cdot 0^{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

folgt ($p \neq -1$). Durch mehrfaches Ableiten bzw. mehrfaches partielles Ableiten unter dem Integral erhalten wir:

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = -\frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow I''(p) = \frac{2}{(p+1)^3} \Rightarrow \dots \Rightarrow I^{(m)}(p) = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(p+1)^{m+1}}.$$

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = \int_0^1 \frac{\partial x^p}{\partial p} dx = \int_0^1 x^p \cdot \ln(x) dx \Rightarrow$$

$$I''(p) = \int_0^1 \frac{\partial x^p \cdot \ln(x)}{\partial p} dx = \int_0^1 x^p \cdot \ln^2(x) dx \Rightarrow \dots \Rightarrow I^{(m)}(p) = \int_0^1 x^p \cdot \ln^m(x) dx.$$

Damit ist für $p = n$ mit natürlicher Zahl n und unter Betrachtung der m . Ableitung $I^{(m)}(p)$:

$$I^{(m)}(n) = \int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

III. Der Integrand $f(x) = x^x$ wird zunächst mit Hilfe der Logarithmengesetze umgeformt:

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln(x)},$$

so dass auf Grund der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion (gemäß I.) sich ergibt:

$$f(x) = x^x = e^{x \ln(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x \ln(x))^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i \ln^i(x)}{i!}.$$

IV. Wir integrieren das uneigentliche Integral wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^x dx &\stackrel{(III)}{=} \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i \ln^i(x)}{i!} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^i \ln^i(x)}{i!} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \int_0^1 x^i \ln^i(x) dx \stackrel{(II: m=i, n=i)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^i \cdot i!}{(i+1)^{i+1}} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)^{i+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^j}. \end{aligned}$$

Dabei beruhen Existenz und Limesbetrachtung des uneigentlichen Integrals (2. Art) $\int_0^1 x^x dx$ auf der

$$\text{gültigen Integralformel } \int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

V. Der Integralwert des gesuchten uneigentlichen Integrals ist also eine unendliche Reihe:

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^j} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

VI. Eine Näherung des Integral- und Reihenwerts erhalten wir, indem wir das uneigentliche Integral numerisch etwa mit der verketteten Simpsonregel berechnen. Mit ein paar hundert Verkettungen der Regel ergibt sich:

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^j} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots \approx 0,7834.$$

Der Integralwert ist der Inhalt der Fläche zwischen Funktion $f(x) = x^x$ und x-Achse im Integrationsintervall $[0; 1]$.