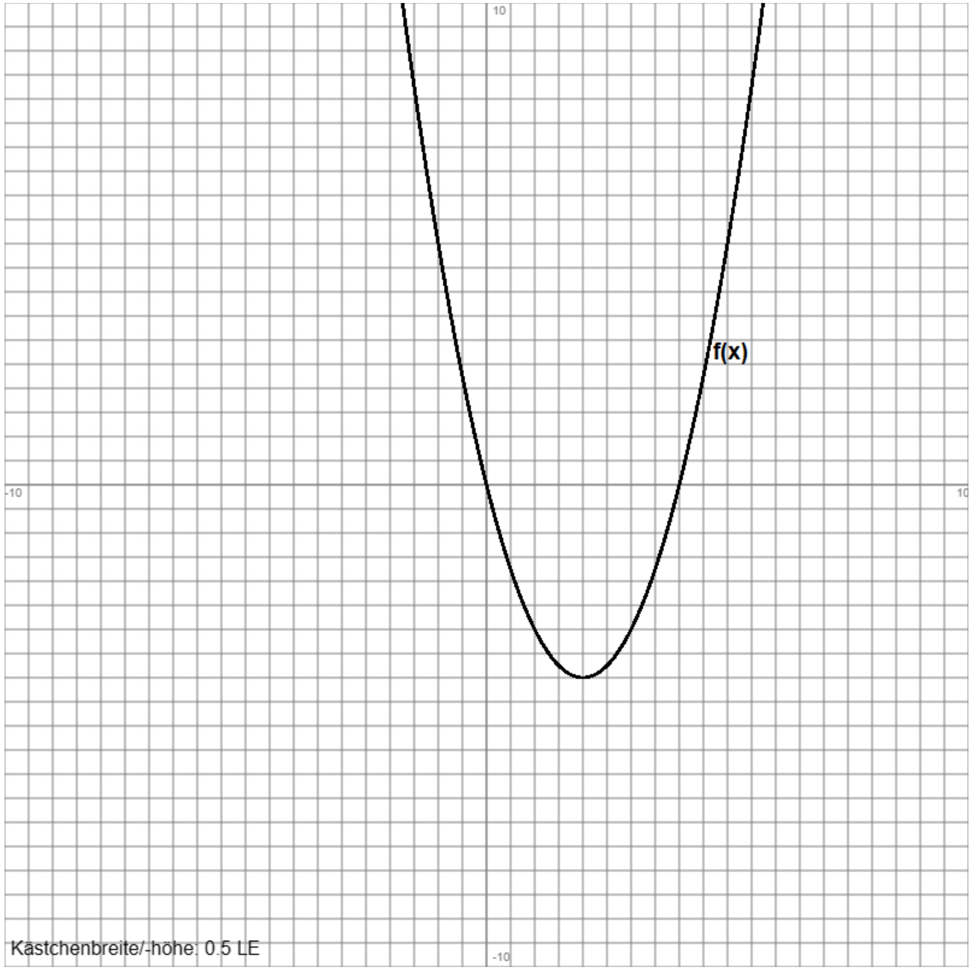
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis > Integralfunktion der oberen Grenze

Aufgabe: Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - 4x$. Zur Parabel wird für jedes reelle u die Integralfunktion $J_u(x) = \int_u^x f(t)dt$ als Funktion der oberen Grenze x gebildet. Für welche u hat dann die Funktion $J_u(x)$ für x > u keine, eine oder zwei Nullstellen?

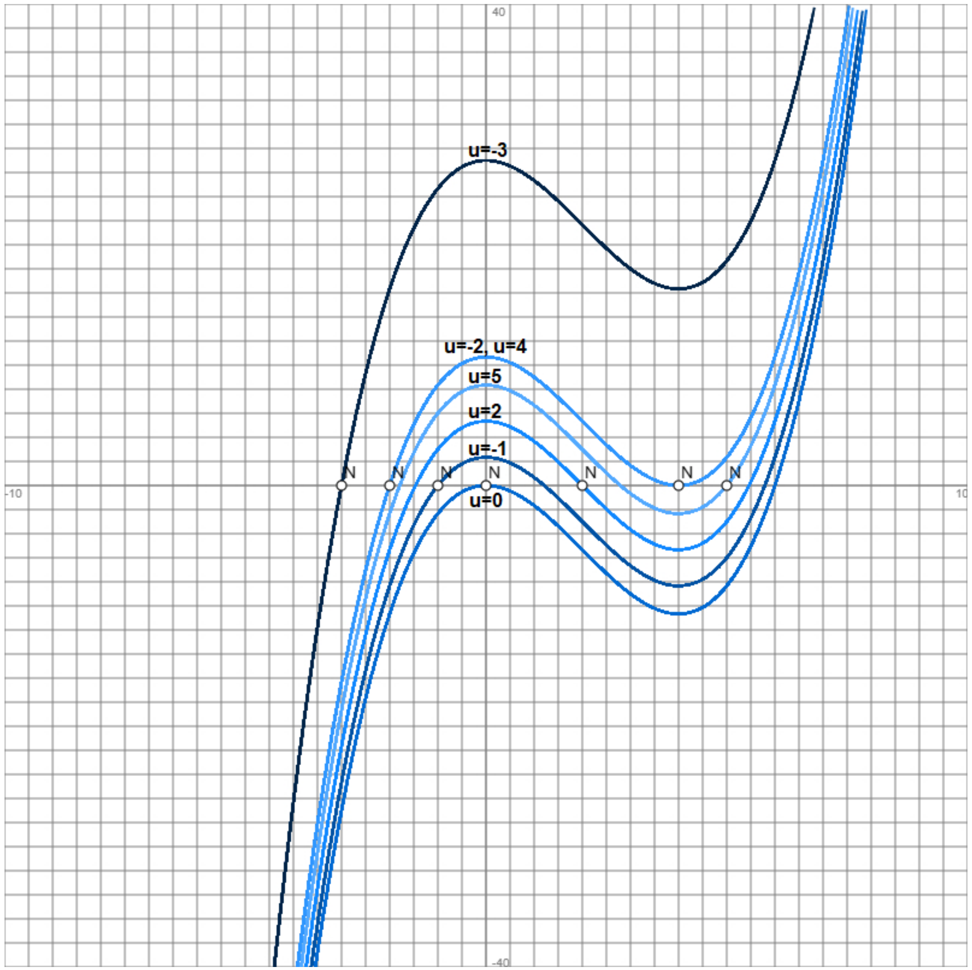


Lösung: I. Die <u>Integralfunktion</u> $J_u(x) = \int_u^x f(t)dt$, uε**R**, ist eine Stammfunktion von f(x), die sich durch Integration der vorgegebenen Funktion bestimmen lässt. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze x errechnet sich als:

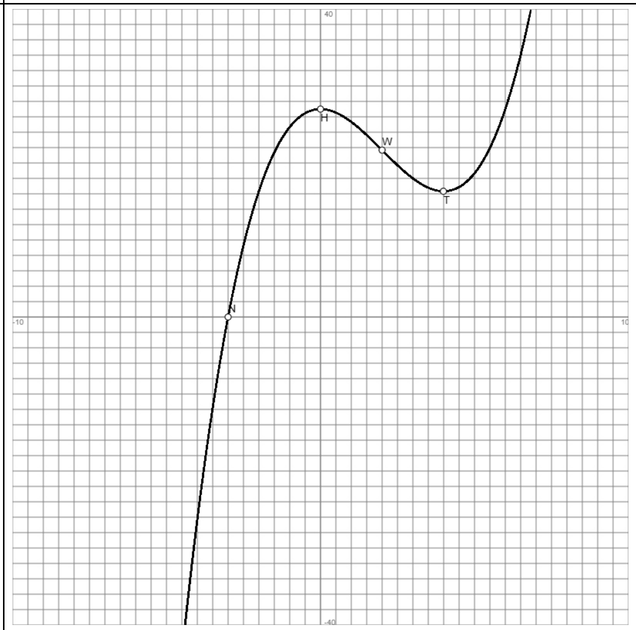
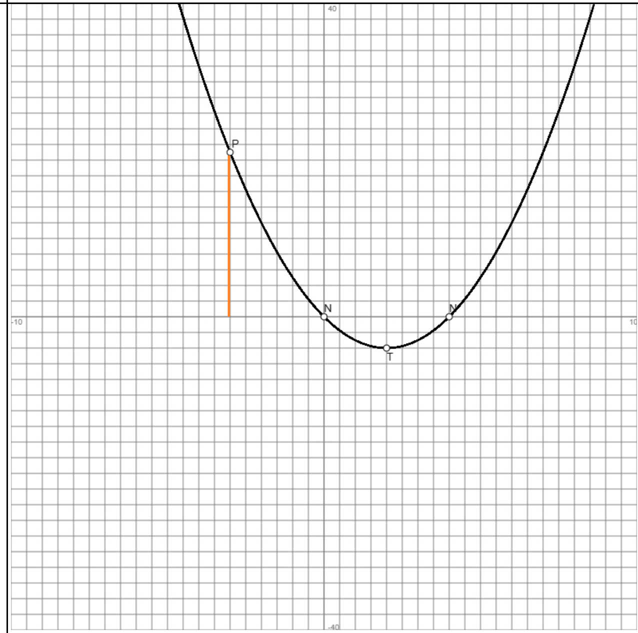
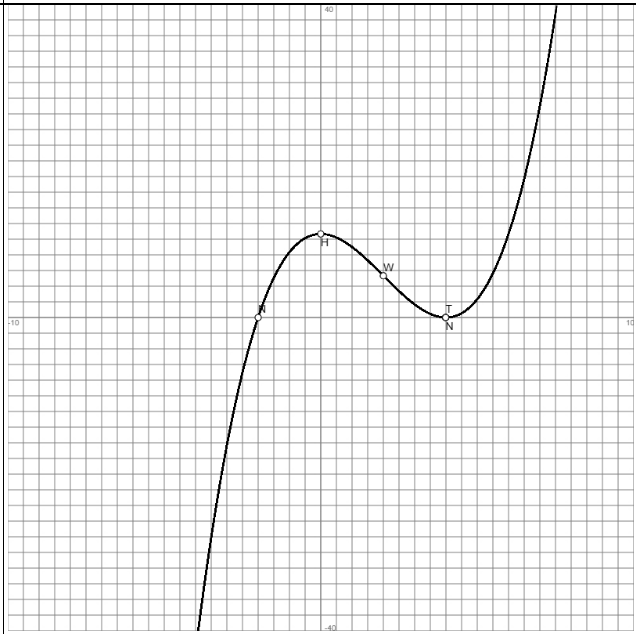
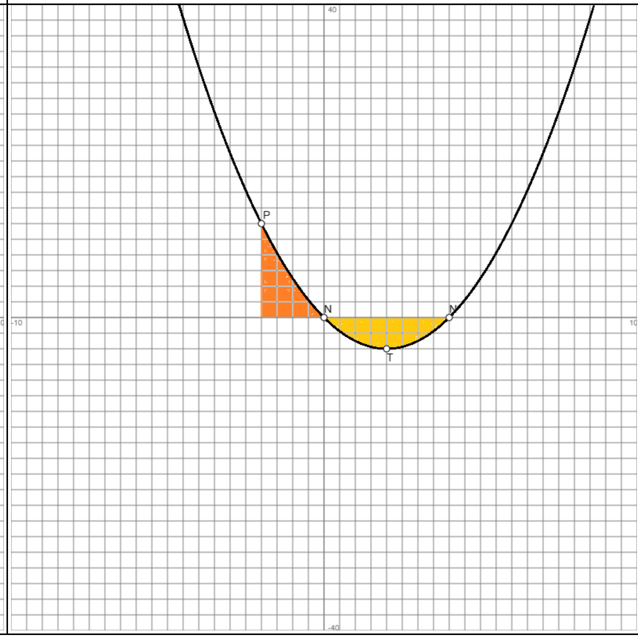
$$J_u(x) = \int_u^x f(t)dt = \int_u^x (t^2 - 4t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2\right]_u^x = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right) - \left(\frac{1}{3}u^3 - 2u^2\right) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}u^3 + 2u^2.$$

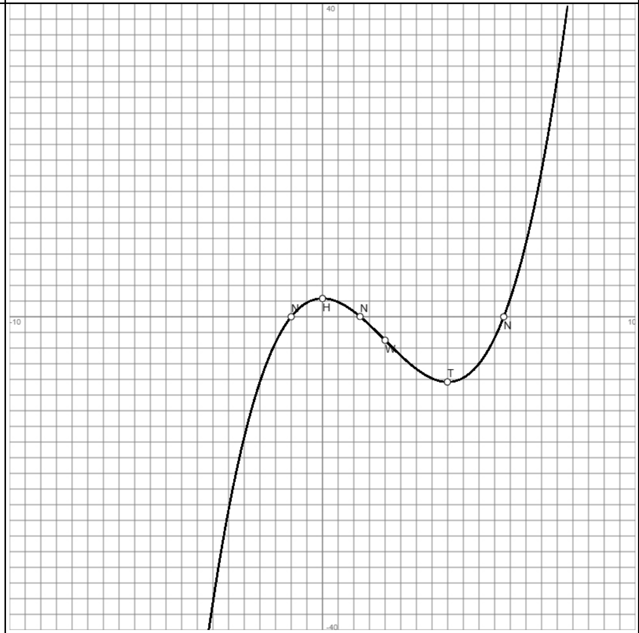
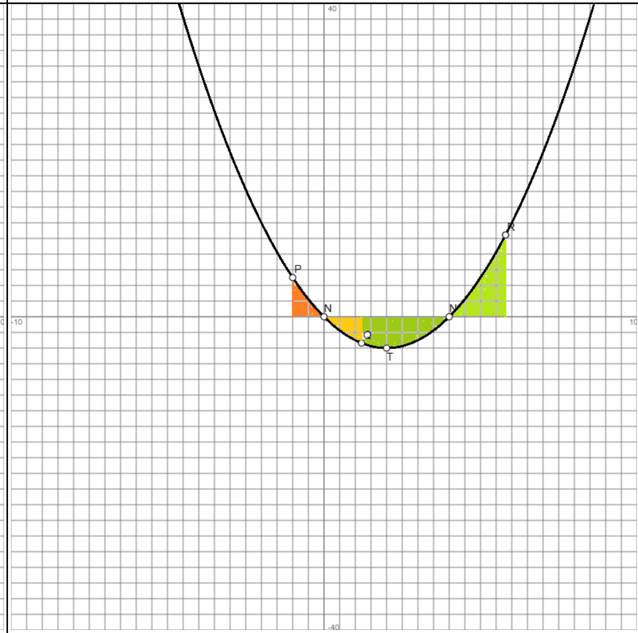
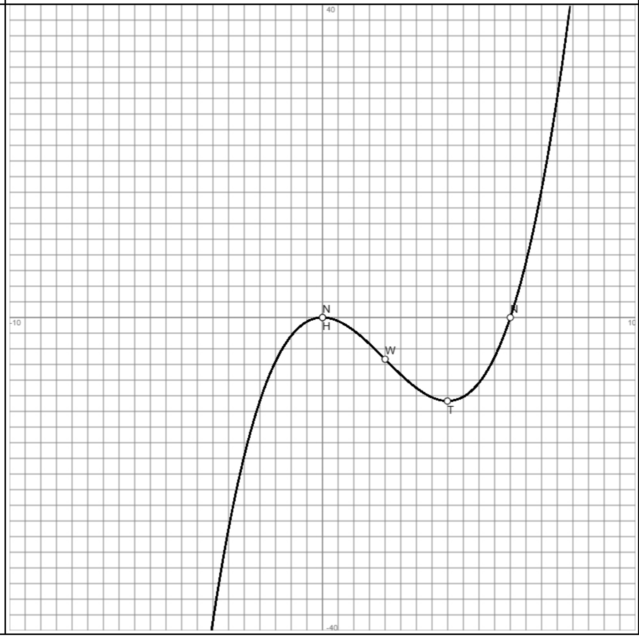
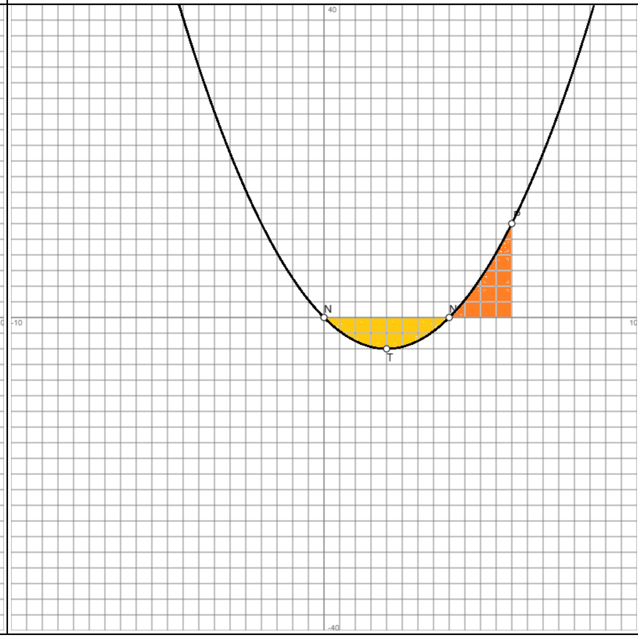
(Mit der Integrationskonstante C = $-\frac{1}{3}u^3 + 2u^2$ liegt also mit $J_u(x)$ im Übrigen eine Stammfunktion F(x) vor mit: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + C$. Da C = C(u) = $-\frac{1}{3}u^3 + 2u^2$ (als ganz rationale Funktion 3. Grades) alle reellen Werte annehmen kann, ist jede Stammfunktion F(x) auch eine Integralfunktion.)

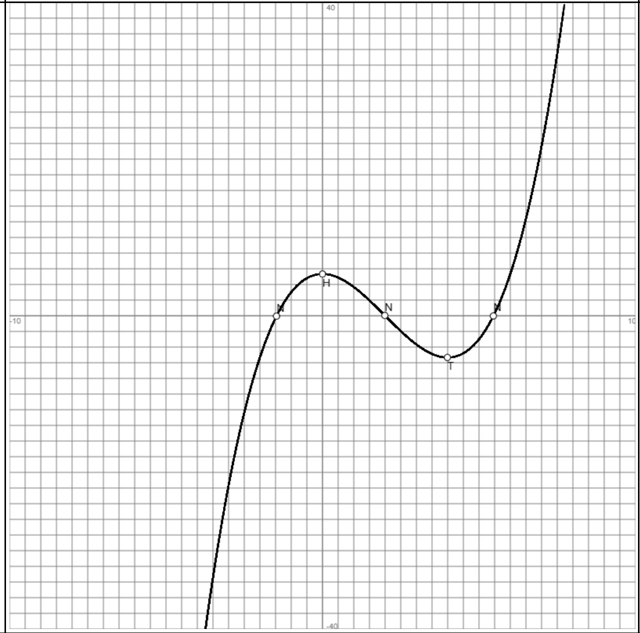
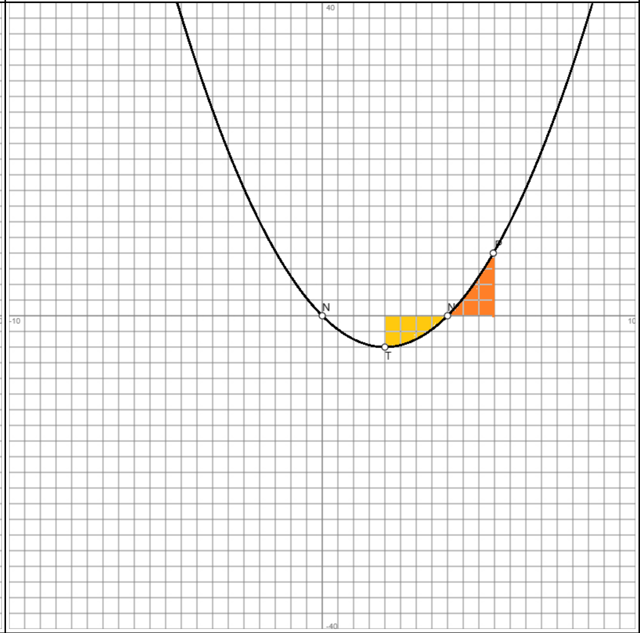
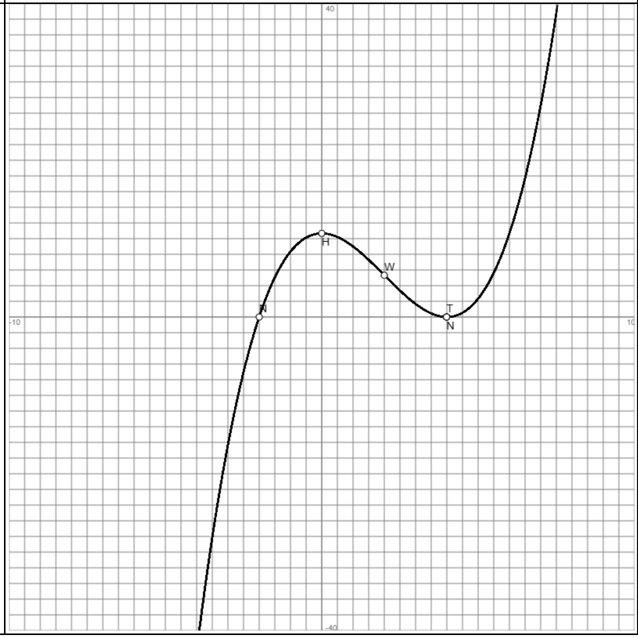
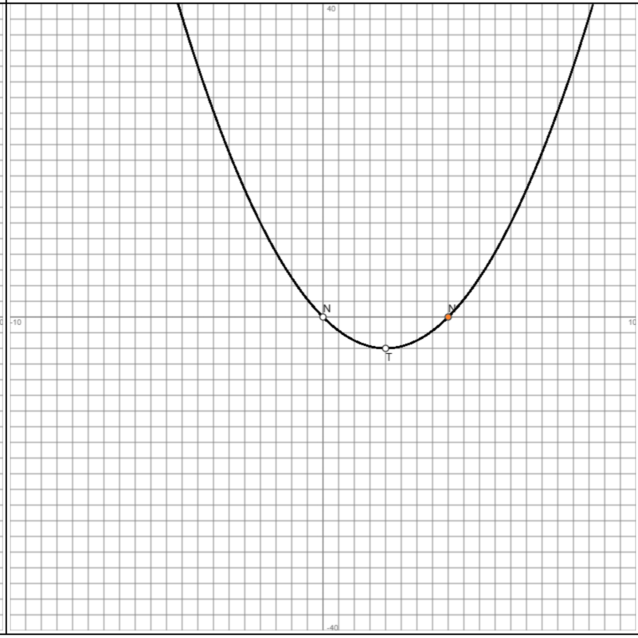
II. Die Funktion $J_u(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}u^3 + 2u^2$ besitzt als ganz rationale Funktion 3. Grades mindestens eine und höchstens drei Nullstellen. Da $J_u(u) = \int_u^u f(t)dt = 0$ gilt, liegt an der Stelle x = u auf jeden Fall eine Nullstelle vor, gut ablesbar an der nebenstehend abgebildeten Funktionenschar. Dargestellt sind die Funktionen $J_u(x)$ für u = -3, -2, -1, 0, 2, 4, 5; hierbei gilt: $J_{-2}(x) = J_4(x)$.

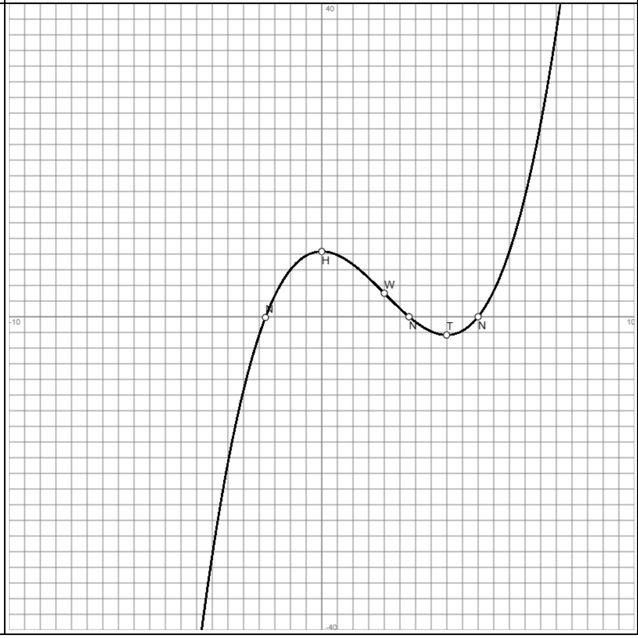
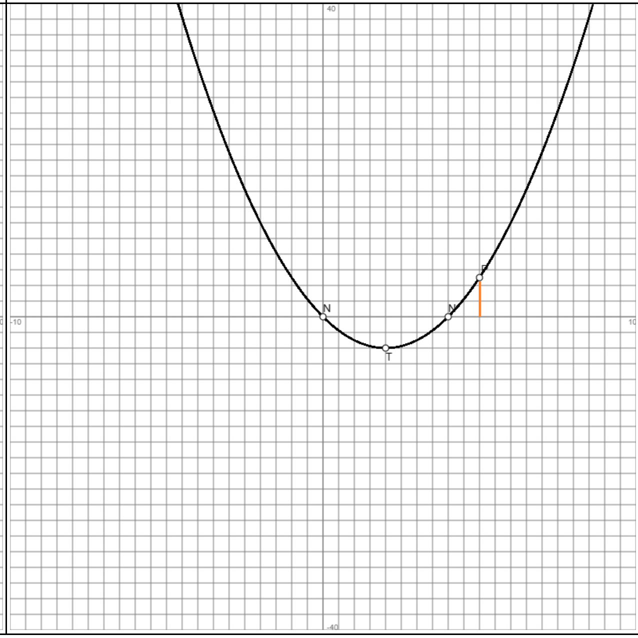


III. Den abgebildeten Graphen der Schar paralleler Funktionen $J_u(x)$ entsprechen Flächen und Flächensalden bestimmter Integrale, die Null ergeben (Nullstellen von $J_u(x)$):

u =	$J_u(x)$ =	$J_u(x)$	f(x), Flächen (ober- bzw. unterhalb der x-Achse), Flächensalden	Nullstellen von $J_u(x)$ (x > u)
-3	$J_{-3}(x) = x^3/3 – 2x^2 + 27$			[x=-3], -
-2	$J_{-2}(x) = x^3/3 – 2x^2 + 32/3$			[x=-2]; x=4

u =	$J_u(x)$ =	$J_u(x)$	f(x), Flächen (ober- bzw. unterhalb der x-Achse), Flächensalden	Nullstellen von $J_u(x)$ (x > u)
-1	$J_{-1}(x) = x^3/3–2x^2+7/3$			[x=-1]; x=1,21; x = 5,79
0	$J_0(x) = x^3/3–2x^2$			[x=0], x = 6

u =	$J_u(x)$ =	$J_u(x)$	f(x), Flächen (ober- bzw. unterhalb der x-Achse), Flächensalden	Nullstellen von $J_u(x)$ (x > u)
2	$J_2(x) = x^3/3-2x^2+16/3$			[x=-1,56, x=2], x=5,46
4	$J_4(x) = x^3/3-2x^2+32/3$			[x=-2, x=4], -

u =	$J_u(x)$ =	$J_u(x)$	f(x), Flächen (ober- bzw. unterhalb der x-Achse), Flächensalden	Nullstellen von $J_u(x)$ (x > u)
5	$J_5(x) = x^3/3–2x^2+25/3$			[x=-1,79, x=2,79, x=5], -

IV. Die <u>Nullstellen</u> von $J_u(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}u^3 + 2u^2$ lassen sich auch direkt wie folgt berechnen. Zunächst gilt – wie erwähnt –, dass x = u Nullstelle der Integralfunktion ist. Polynomdivision ergibt dann, indem $3 \cdot J_u(x) = x^3 - 6x^2 - u^3 + 6u^2$ betrachtet wird (was keine Auswirkung auf den Wert der Nullstellen hat):

$(x^3 – 6x^2 – u^3 + 6u^2) : (x – u) = x^2 + (u-6)x + u^2 – 6u$
$\underline{-(x^3 – ux^2)}$
$(u–6)x^2$
$\underline{-((u–6)x^2 – (u^2–6u)x)}$
$(u^2–6u)x – u^3 + 6u^2$
$\underline{-((u^2–6u)x – u^3 + 6u^2)}$
0

Die weiteren Nullstellen errechnen sich aus der quadratischen Gleichung:

$x^2 + (u-6)x + u^2 – 6u = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = u-6, c = u^2-6u)

$$x_{1,2} = \frac{-u+6 \pm \sqrt{(u-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (u^2 - 6u)}}{2 \cdot 1} = \frac{-u+6 \pm \sqrt{u^2 - 12u + 36 - 4u^2 + 24u}}{2} = \frac{-u+6 \pm \sqrt{-3u^2 + 12u + 36}}{2}$$

und sind damit ebenfalls abhängig vom Wert von u. Wir betrachten nun die Diskriminante D = $-3u^2+12u+36$ (unter der Wurzel), um Aussagen zur Anzahl und Lage der übrigen (maximal zwei) Nullstellen zu treffen. Es ergibt sich wiederum aus einer quadratischen Gleichung:

$-3u^2+12u+36=0$ | :(-3)
$u^2 - 4u - 12 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -4, c = -12)

$$u_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{4\pm8}{2}$$

$u_1 = \frac{4-8}{2}=\frac{-4}{2}=-2$, $u_2 = \frac{4+8}{2}=\frac{12}{2}=6$.

D.h.: Die Integralfunktion $J_u(x)$ besitzt für u < -2 nur die einzige Nullstelle x = u; für u = -2 zwei Nullstellen x = -2, x = 4; für -2 < u < 0 drei Nullstellen x = u, $x=\frac{-u+6-\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$, $x=\frac{-u+6+\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$; für u = 0 zwei Nullstellen x = 0, x = 6; für 0 < u < 4 drei Nullstellen $x=\frac{-u+6-\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$, x = u, $x=\frac{-u+6+\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$; für u = 4 zwei Nullstellen x = -2, x = 4; für 4 < u < 6 drei Nullstellen $x=\frac{-u+6-\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$, $x=\frac{-u+6+\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$, x = u; für u = 6 zwei Nullstellen x = 0, x = 6; für u > 6 nur die einzige Nullstelle x = u.

V. Hinsichtlich der Aufgabenstellung gilt den Nullstellen der Integralfunktion $J_u(x)$ entsprechend die folgende Übersicht:

u	Nullstellen von $J_u(x)$ (x > u)
u < -2	keine
u = -2	eine (x = 4)
-2 < u < 0	zwei ($x=\frac{-u+6-\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$, $x=\frac{-u+6+\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$)
u = 0	eine (x = 6)
0 < u < 4	eine ($x=\frac{-u+6+\sqrt{-3u^2+12u+36}}{2}$)
4 ≤ u	keine

(**R** = Menge der reellen Zahlen)

www.michael-buhlmann.de / 03.2023 / Aufgabe 1818