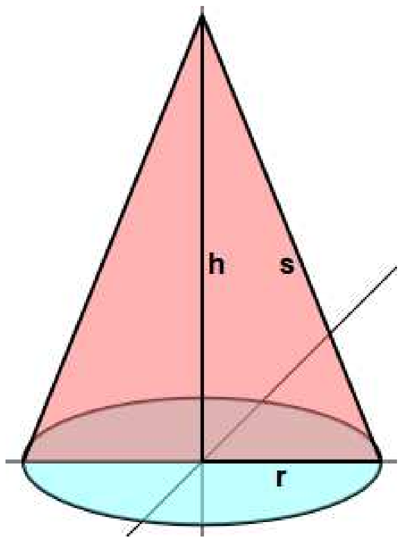
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie
> Kegel

Aufgabe: Bestimme mit vorgegebenem Radius r = 4 cm und vorgegebener Höhe h = 9 cm den Durchmesser d, den Umfang u, die Mantellinie s, die Grundfläche G, die Mantelfläche M, die Oberfläche O und das Volumen V des Kegels.



Lösung: I. Ein (gerader) Kegel mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises mit Durchmesser d und Kreisumfang u sowie durch die Kegelhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V. Es gilt:

Kegel

Grundfläche, Radius	$G = \pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{G}{\pi}}$	
Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kreisumfang	$U = 2\pi r$	$U = \pi d$	$r = \frac{U}{2\pi}$
Mantellinie, Höhe	$s^2 = r^2 + h^2$	$r^2 = s^2 - h^2$	$h^2 = s^2 - r^2$
Mantelfläche	$M = \pi r s$	$r = \frac{M}{\pi s}$	$s = \frac{M}{\pi r}$
Oberfläche	$O = G + M = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s)$		
	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$r = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{O}{\pi}}$	$s = \frac{O}{\pi r} - r$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$	$h = \frac{3V}{\pi r^2}$

II. Wir bestimmen zunächst die Kegelgrößen, die unmittelbar vom Kegelradius r = 4 cm abhängen. Für den Kegeldurchmesser d gilt:

$d = 2r = 2 \cdot 4 = 8$ cm,

für den Umfang als Umfang u des Kreises als Grundfläche des Kegels:

$u = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi = 25{,}13$ cm.

Die Kegelgrundfläche G errechnet sich mit der Flächenformel für den Kreis:

$G = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi = 50{,}27$ cm^2.

III. Grundfläche G = 50,27 cm^2 und Kegelhöhe h = 9 cm ergeben das Kegelvolumen V:

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 50{,}27 \cdot 9$ = 150,8 cm^3.

IV. Wir berechnen nun aus Radius r = 4 cm und Höhe h = 9 cm die für die Kegelmantel- und -oberfläche wichtige Mantellinie s gemäß dem Satz des Pythagoras:

$s^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow s^2 = 4^2 + 9^2 = 97 \Rightarrow s = \sqrt{97}$ = 9,85 cm.

V. Für die Kegelmantelfläche M folgt:

$M = \pi rs = \pi \cdot 4 \cdot 9{,}85 = 123{,}76$ cm^2.

VI. Die Kegeloberfläche O ist wegen Grundfläche G = 50,27 cm^2 und Mantelfläche M = 123,76 cm^2 schließlich:

$O = G + M = 50{,}27 + 123{,}76 = 174{,}03$ cm^2.

Damit ist alles beim Kegel bestimmt.

www.michael-buhlmann.de / 02.2020 / Aufgabe 983