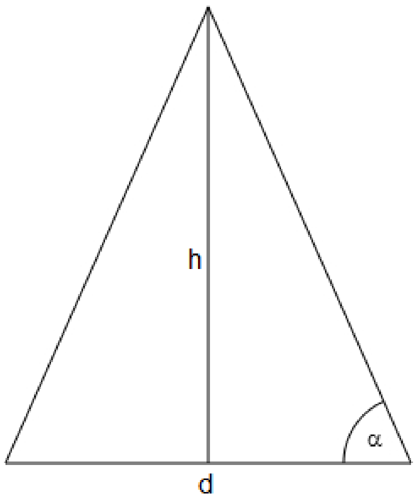
Michael Buhlmann

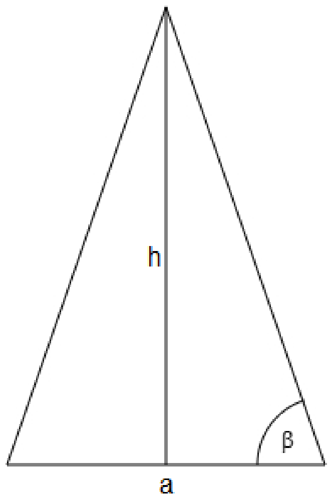
# Mathematikaufgaben
## > Geometrie
## > Kegel, Pyramide

---

**Aufgabe**: Ein Kegel ist nachstehend im Achsenschnitt, ein regelmäßige quadratische Pyramide im Parallelschnitt vorgegeben. Der Kegeldurchmesser beträgt d = 8 cm, der Neigungswinkel der Kegelmantelfläche zur -grundfläche hat die Weite α = 66°. Die Pyramide stimmt mit dem Kegel im Umfang der Grundfläche und der Höhe überein.




**Achsenschnitt des Kegels**



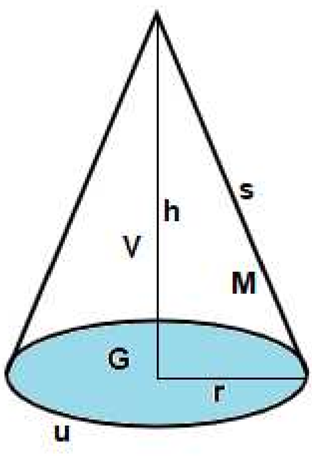

**Parallelschnitt der Pyramide**

a) Berechne den Winkel β der Neigung eines Mantelflächendreiecks der Pyramide zu deren Grundfläche.

b) Bestimme die Differenz der Rauminhalte von Kegel und Pyramide.

c) Ermittle die prozentuale Veränderung des Oberflächeninhalts der Pyramide in Bezug auf den Oberflächeninhalt des Kegels.

**Lösung**: I. Der <u>Achsenschnitt</u> bei Rotationskörpern wie dem Kegel bedeutet einen Schnitt durch die Rotationsachse senkrecht zur Körpergrundfläche. Beim Kegel ergibt sich als Achsenschnitt ein gleichschenkliges Dreieck mit der Mantellinie als Schenkel und dem Durchmesser als Grundseite.
Der <u>Parallelschnitt</u> bei einer regelmäßigen quadratischen Pyramide ist der Schnitt durch die Pyramidenhöhe parallel zu einer (zwei) Grundkante(n) der Pyramide senkrecht zur Körpergrundfläche.

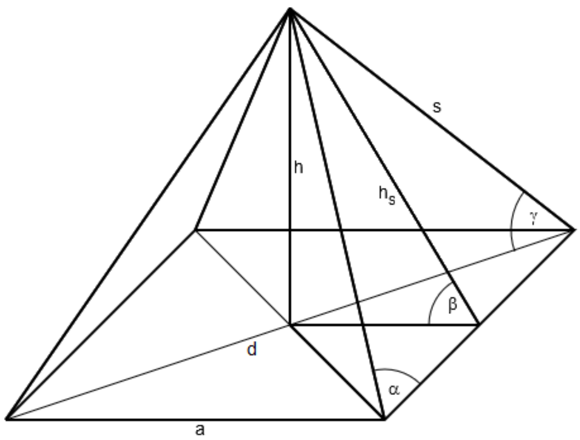


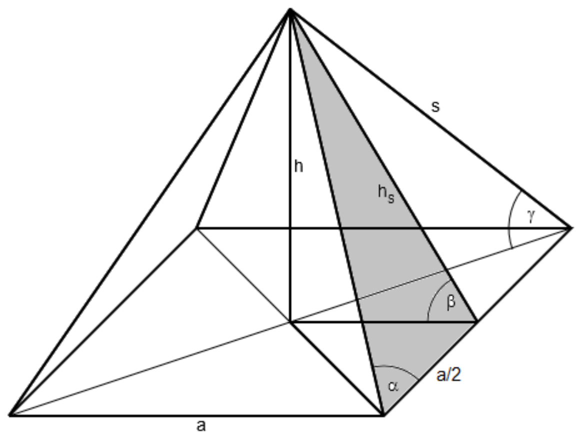

II. Ein (gerader) <u>Kegel</u> mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises mit Durchmesser d und Kreisumfang u sowie durch die Kegelhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V. Es gilt:

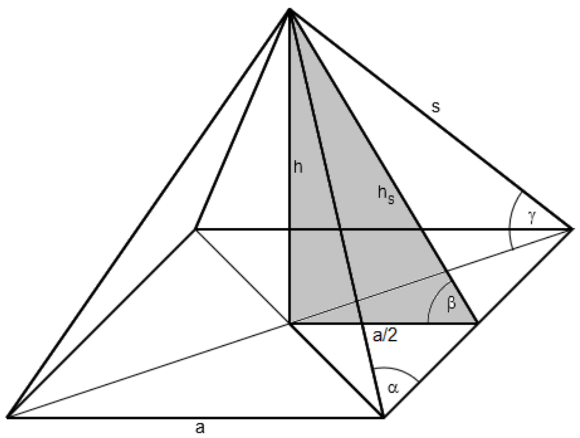
**Kegel**

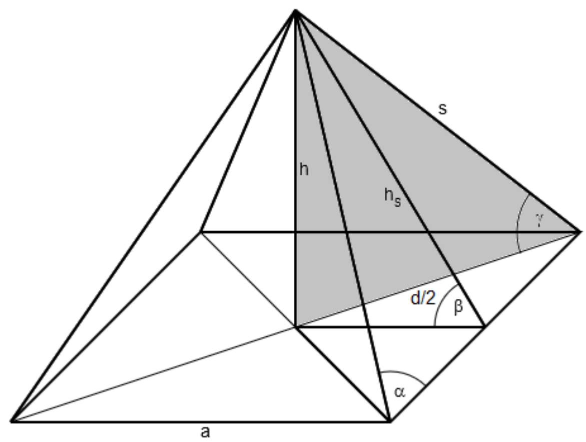
| | | | |
|---|---|---|---|
| Grundfläche, Radius | $G=\pi r^2$ | $r=\sqrt{\dfrac{G}{\pi}}$ | |
| Durchmesser | $d=2r$ | $r=\dfrac{d}{2}$ | |
| Kreisumfang | $u=2\pi r$ | $u=\pi d$ | $r=\dfrac{u}{2\pi}$ |
| Mantellinie, Höhe | $s^2=r^2+h^2$ | $r^2=s^2-h^2$ | $h^2=s^2-r^2$ |
| Mantelfläche | $M=\pi rs$ | $r=\dfrac{M}{\pi s}$ | $s=\dfrac{M}{\pi r}$ |
| Oberfläche | $O=G+M=\pi r^2+\pi rs=\pi r(r+s)$ | | |
| | $G=O-M$ | $M=O-G$ | |
| | | $r=-\dfrac{s}{2}+\sqrt{\dfrac{s^2}{4}+\dfrac{O}{\pi}}$ | $s=\dfrac{O}{\pi r}-r$ |
| Volumen | $V=\dfrac{1}{3}G\cdot h=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ | $r=\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ | $h=\dfrac{3V}{\pi r^2}$ |
| Winkel zwischen Mantelfläch M und Grundfläche G | $\sin\alpha=\dfrac{h}{s}$ | $\cos\alpha=\dfrac{r}{s}$ | $\tan\alpha=\dfrac{h}{r}$ |

III. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe $h_s$, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

| **Quadratische Pyramide** | | | |
|---|---|---|---|
| Grundfläche, Grundkante | $G = a^2$ | $a = \sqrt{G}$ | |
| Grundflächen-diagonale | $d = a\sqrt{2}$ | $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ | |
| Grundflächenumfang | $u = 4a$ | $a = \frac{u}{4}$ | |
| Seitenhöhe | $h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$ |
| Seitenkante | $s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$ |
| Pyramiden-höhe | $s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$ | $h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$ | $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$ |
| Mantelfläche | $M = 2ah_s$ | $h_s = \frac{M}{2a}$ | $a = \frac{M}{2h_s}$ |
| Oberfläche | $O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$<br>$G = O - M$ | $M = O - G$<br>$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$ | $a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$ |
| Volumen | $V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 h$ | $a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$ | $h = \frac{3V}{a^2}$ |
| Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a | $\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$ | $\cos\alpha = \frac{a}{2s}$ | $\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$ |
| Winkel zwischen Seitenhöhe $h_s$ und Grundfläche G | $\sin\beta = \frac{h}{h_s}$ | $\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$ | $\tan\beta = \frac{2h}{a}$ |
| Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G | $\sin\gamma = \frac{h}{s}$ | $\cos\gamma = \frac{d}{2s}$ | $\tan\gamma = \frac{2h}{d}$ |

IV. a) Wir betrachten zunächst den Kegel. Der Kegelradius r beträgt auf Grund des Durchmessers d = 8 cm:

r = d/2 = 8/2 = 4 cm.

Der Umfang der Grundfläche des Kegels ist dann:

u = 2πr = 2π·4 = 8π = 25,13 cm.

Die Höhe des Kegels ergibt sich im rechtwinkligen Achsendreieck mit r = 4 cm und h als Katheten und aus dem Winkel α = 66° als:

$$\tan\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow \tan 66° = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \tan 66° = 9 \text{ cm.}$$

Denselben Wert h = 9 cm hat auch die Höhe der regelmäßigen quadratischen Pyramide. Weiter ist gemäß der Aufgabenstellung der Umfang der Pyramidengrundfläche u = 25,13 cm. Wegen des Quadrats als Grundfläche gilt mit Pyramidengrundkante a bei u = 4a:

a = u/4 = 25,13/4 = 6,28 cm.

Im rechtwinkligen Paralleldreieck mit a/2 = 3,14 cm und h = 9 cm als Katheten lässt sich dann der gesuchte Winkel β berechnen vermöge:

$$\tan\beta = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \tan\beta = \frac{9}{3{,}14} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}(\frac{9}{3{,}14})$$ = 70,8°.

b) Mit Radius r = 4 cm und Höhe h = 9 cm errechnet sich das Kegelvolumen $V_{Ke}$

$V_{Ke}$ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 9$ = 150,8 cm³,

mit Grundkante a = 6,28 cm und Höhe h = 9 cm das Pyramidenvolumen $V_{Py}$:

$V_{Py}$ = $\frac{1}{3}a^2 h = \frac{1}{3} \cdot 6{,}28^2 \cdot 9$ = 118,31 cm³.

Die Volumendifferenz $V_\Delta$ zwischen dem größeren Kegel- und dem kleineren Pyramidenvolumen beträgt:

$V_\Delta$ = 150,8 – 118,31 = 32,49 ≈ 32,5 cm³.

c) Zur Berechnung der Oberflächeninhalte von Kegel und Pyramide ist zunächst der Satz des Pythagoras anzuwenden. Und zwar gilt für die Mantellinie s des Kegels bei Radius r = 4 cm und Höhe h = 9 cm:

$s^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow s^2 = 4^2 + 9^2 = 97 \Rightarrow s = \sqrt{97}$ = 9,85 cm,

für die Seitenhöhe $h_s$ der Pyramide bei Grundkante a = 6,28 cm und Höhe h = 9 cm:

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_s^2 = 9^2 + 3{,}14^2 = 90{,}86 \Rightarrow h_s = \sqrt{90{,}86}$$ = 9,53 cm.

Es ergibt sich damit als Oberflächeninhalt des Kegels $O_{Ke}$:

$O_{Ke}$ = $\pi r^2 + \pi r s = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot 9{,}85$ = 174,04 cm²,

als Oberflächeninhalt der Pyramide $O_{Py}$:

$O_{Py}$ = $a^2 + 2ah_s = 6{,}28^2 + 2 \cdot 6{,}28 \cdot 9{,}53$ = 159,14 cm².

Das Verhältnis der beiden Oberflächeninhalte führt auf die gesuchte prozentuale Veränderung zwischen den Oberflächeninhalten von Kegel und Pyramide:

$$\frac{O_{Py}}{O_{Ke}} = \frac{159{,}14}{174{,}04}$$ = 0,914 = 91,4 % => 91,4 % – 100 % = -8,6 %.

D.h.: Der Oberflächeninhalt der Pyramide ist um 8,6 % kleiner als der des Kegels.

www.michael-buhlmann.de / 01.2025 / Aufgabe 2348