Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie, lineare Algebra
> Kegelschnitte

Aufgabe: Führe zum Kegelschnitt:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 1 = 0$$

eine Hauptachsentransformation durch und ermittle die Art des Kegelschnitts.

Lösung: I. Allgemein ist die quadratische Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (+), die mit $b \neq 0$ einen gedrehten Kegelschnitt beschreibt, mit $c \neq 0$ nach y auflösbar vermöge:

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (Umstellen)

$cy^2 + (bx+e)y + ax^2 + dx + f = 0$ (abc-Formel)

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(bx+e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + (2be - 4cd)x + e^2 - 4cf}}{2c}.$$

Das ± im y-Term steht für die zwei Äste der Kegelschnittkurve im x-y-Koordinatensystem.

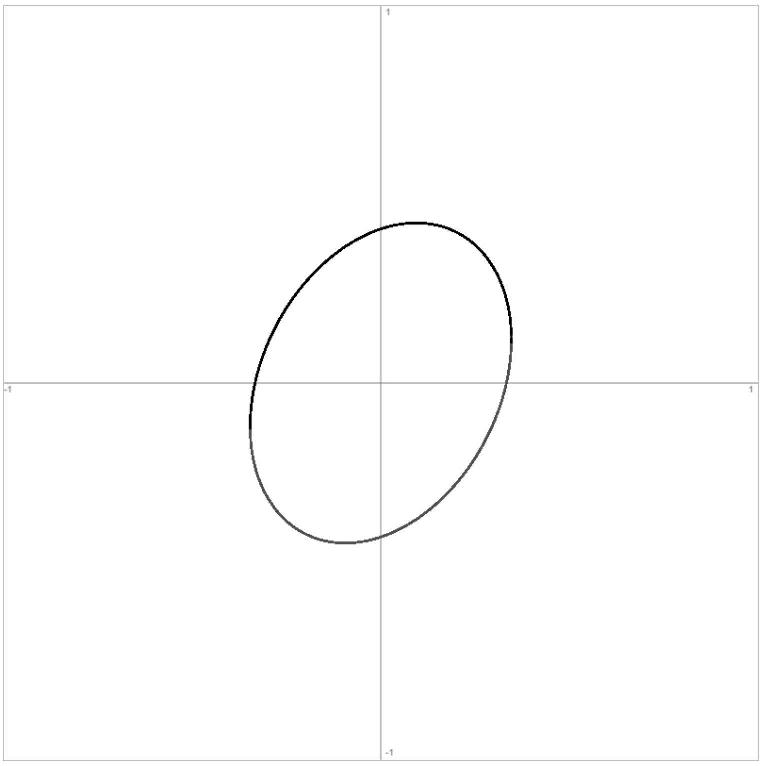
II. Wir stellen um:

$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 1 = 0$

$6y^2 - 4xy + 9x^2 - 1 = 0$

$$y = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 4 \cdot 6 \cdot (9x^2 - 1)}}{2 \cdot 6} = \frac{4x \pm \sqrt{24 - 200x^2}}{12} = \frac{x}{3} \pm \frac{1}{6}\sqrt{6 - 50x^2}.$$

Es ergibt sich die Kurve einer um den Ursprung des Koordinatensystems gedrehten Ellipse:



III. Für eine reelle quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

$$\det(A-\lambda E) = 0 \quad (*)$$

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren $\vec{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius ρ(A).
d) Die Spur der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

IV. Determinanten von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| u.a. von der Form:

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

V. Eine reelle quadratische n×n-Matrix A ist unitär diagonalisierbar, wenn es eine reelle n×n-Matrix S als Transformationsmatrix gibt mit $S^{-1} = S^T$ (Übereinstimmung von transponierter und inverser Matrix bei unitären Matrizen), so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix A enthält. Die unitäre Diagonalisierbarkeit einer symmetrischen Matrix A ist gegeben, wenn z.B. das charakteristische Polynom det(A–λE) in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt oder Eigenvektoren von A eine Basis des n-dimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^n$ bilden. Ist A hierbei nicht symmetrisch, so gelingt vermöge der Transformationsmatrix S mit $S^{-1} = S^T$ nur die Umwandlung in eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelementen. Eine Diagonalisierbarkeit von A ist aber möglich über die Jordansche Normalform (Jordanmatrix).

VI. Die Diagonalisierbarkeit von Matrizen, d.h. hier die Hauptachsentransformation lässt sich nun anwenden auf die gedrehte Kegelschnittgleichung (+) (siehe I.):

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,\ b\neq 0.$$

Letztere kann in Matrixschreibweise geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overset{->}{u}^{T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \quad (++)$$

mit: $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, $\overset{->}{u} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$. Die Matrix A ist symmetrisch und damit diagonalisierbar. Es gibt also eine Transformationsmatrix S mit $S^{-1} = S^T$ und eine Diagonalmatrix D mit $D = S^{-1}AS$, so dass auf Grund von $A = SDS^{-1}$ und $E = SS^{-1}$ die Gleichung (++) zu:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot SDS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overset{->}{u}^{T} \cdot SS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

wird. Es folgt mit $\begin{pmatrix} x* & y* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot S$ (und: $\begin{pmatrix} x* \\ y* \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$):

$$\begin{pmatrix} x* & y* \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} x* \\ y* \end{pmatrix} + \overset{->}{u}^{T} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} x* \\ y* \end{pmatrix} + f = 0,$$

womit die <u>Hauptachsentransformation</u> des Kegelschnitts in ein x*-y*-Koordinatensystem erfolgt ist. Daraus ergibt sich – unter Wegfall des xy-Terms in Gleichung (+) – die Hauptform des Kegelschnitts:

$$a_1x^{*2} + c_1y^{*2} + d_1x^* + e_1x^* + f = 0.$$

Quadratische Ergänzungen führen dann noch auf binomische Formen:

$$a_1(x^*+d_2)^2 + c_1(y^*+e_2)^2 + f_2 = 0,$$

die die Verschiebung des Kegelschnitts im x*-y*-Koordinatensystem anzeigen.

VII. Die Gleichung $9x^2 – 4xy + 6y^2 – 1 = 0$ ergibt: a = 9, b = -4, c = 6, d = 0, e = 0, f = -1, so dass (nach VI.) die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\overset{->}{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gebildet werden können. Es ergibt sich auch wegen $\overset{->}{u}$ als Nullvektor:

$9x^2 – 4xy + 6y^2 – 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$.

VIII. Wir betrachten die symmetrische Matrix A, die wir diagonalisieren (siehe III.-V.). Wir bestimmen dazu die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

det(A–λE) = 0

mit:

$A – \lambda E = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

als:

$\det(A–\lambda E) = - (9-\lambda)(6-\lambda) – 4 = \lambda^2 – 15\lambda + 50 = 0$

(Determinantenentwicklung nach IV.). Die Gleichung lässt sich nach λ umstellen:

$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$ (abc-Formel)
$\lambda = 5$, $\lambda = 10$.
$\lambda = 5$, $\lambda = 10$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit <u>Eigenwerte</u> der Matrix A.

IX. Wir bestimmen zu den zwei gefundenen Eigenwerten die <u>Eigenvektoren</u> wie folgt:

<u>λ = 5</u>: $A - 5E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ => $(A-5E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+\ 4x\ -\ 2y\ =\ 0$
$-\ 2x\ +\ 1y\ =\ 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x	*y*	|	*R.S.*
4	-2	|	0
-2	1	|	0

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) + 1*(*1*) /

4	-2	|	0
0	0	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+\ 4x\ -\ 2y\ =\ 0$
$0\ =\ 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

y = t
x = 0 + 0.5t

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=5} = t\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell.

<u>λ = 10</u>: $A - 10\cdot E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ => $(A-10E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$-\ 1x\ -\ 2y\ =\ 0$
$-\ 2x\ -\ 4y\ =\ 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x	*y*	|	*R.S.*
-1	-2	|	0
-2	-4	|	0

<u>1. Schritt</u>: -1*(*2*) + 2*(*1*) /

-1	-2	|	0
0	0	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$-\ 1x\ -\ 2y\ =\ 0$
$0\ =\ 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

y = t
x = 0 – 2t

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell.

Die Eigenvektoren zur Matrix A und zu den Eigenwerten λ = 5, λ = 10 sind also Vielfache von:
$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Letztere stellen Basisvektoren der Eigenräume der Eigenvektoren dar).

X. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer linear unabhängig sind, die zwei Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen auch senkrecht aufeinander, so dass sie nur noch normiert werden müssen. Die Normierung der Eigenvektoren ergibt die Vektoren $\frac{2\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Orthonormalbasis. Die Transformationsmatrix S besteht spaltenweise aus den Vektoren der Orthonormalbasis, also:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Die inverse Transformationsmatrix S^{-1} ist erwartungsgemäß:

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Diagonalmatrix D:

$$D = S^{-1}AS = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix D lautet also: $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ und enthält wie gewünscht in der Hauptdiagonalen die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

XI. Wir führen das x*-y*-Koordinatensystem ein und haben (nach VI.) die Beziehung:

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^{*2} + 10y^{*2} - 1 = 0.$$

Die Kegelschnittgleichung

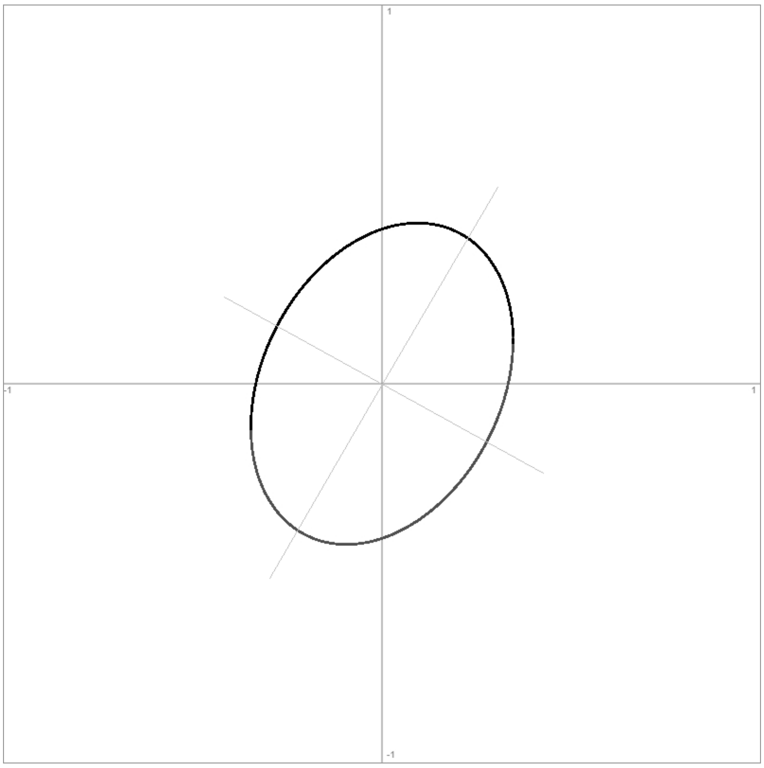
$$5x^{*2} + 10y^{*2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^{*2} + 10y^{*2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^{*2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{y^{*2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = 1$$

ist die einer durch Hauptachsentransformation ermittelten Ellipse, deren Achsen auf den Koordinatenachsen des x*-y*-Koordinatensystems liegen, da die Ellipsenmitte den Ursprung O(0|0) dieses Koordinatensystems darstellt; die Längen der Halbachsen der Ellipse betragen $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}$.

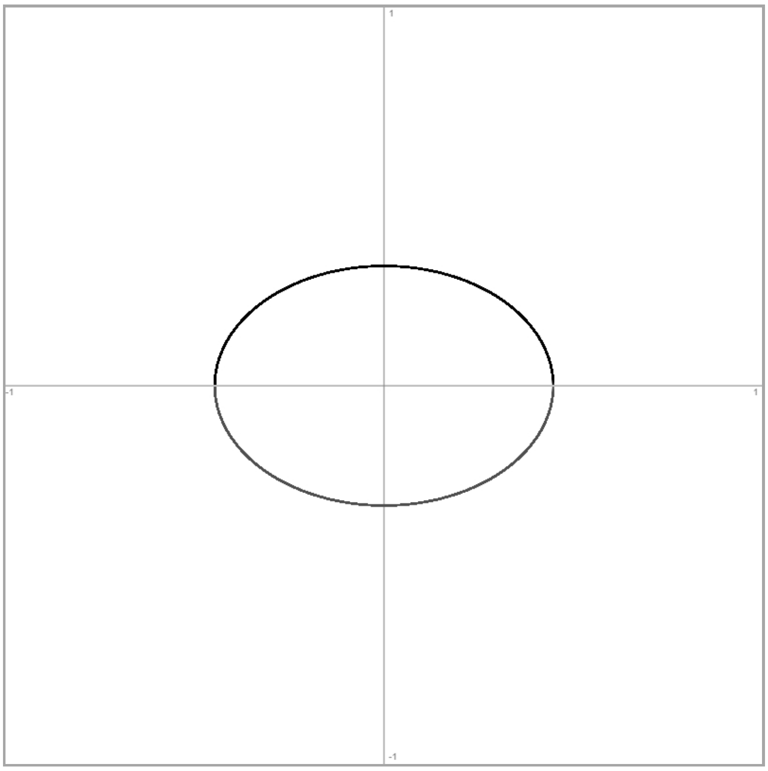
Die Transformationsmatrix S stellt eine Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ dar. Somit lässt sich noch der Drehwinkel bestimmen, z.B. mit Hilfe des oberen linken Elements von Transformations- und Drehmatrix. Es gilt damit:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \varphi = 63{,}43°,$$

wobei für den Drehwinkel φ = 63,43° gilt: $\tan\varphi = 2$. Mithin liegt die x*-Achse des x*-y*-Koordinatensystems auf der Ursprungsgeraden y = 2x des x-y-Koordinatensystems. Wir haben damit die zeichnerische Darstellung der Ellipse im x-y-Koordinatensystem als:



und im x*-y*-Koordinatensystem als:



www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1428