Michael Buhlmann

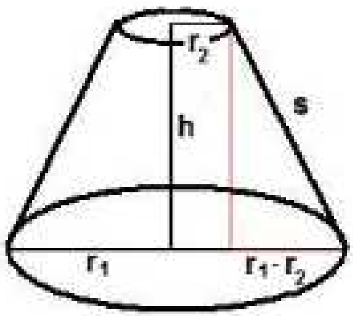
Mathematikaufgaben
> Geometrie
> Kegelstumpf

Aufgabe: Berechne Volumen und Oberfläche eines Kegelstumpfs mit Grundflächenradius r_1 = 12 cm, Deckflächenradius r_2 = 8 cm und Höhe h = 10 cm.

Lösung: I. Ein gerader Kreiskegelstumpf entsteht, wenn bei einem geraden Kreiskegel parallel zur Grundfläche ein Kegel abgeschnitten wird. Ein Kegelstumpf mit einem Kreis als Grundfläche und einem zweiten Kreis als Deckfläche ist durch die Radien r_1 und r_2 der Kreise und durch Stumpfhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G_1 und die Deckfläche G_2 sowie das Volumen V. Insbesondere gelten die Formeln:

Grundfläche, Radius unten: $G_1 = \pi r_1^2$, $r_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\pi}}$

Deckfläche, Radius oben: $G_2 = \pi r_2^2$, $r_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\pi}}$



Durchmesser/Grundfläche: $d_1 = 2r_1$, $r_1 = \frac{d_1}{2}$

Durchmesser/Deckfläche: $d_2 = 2r_2$, $r_2 = \frac{d_2}{2}$

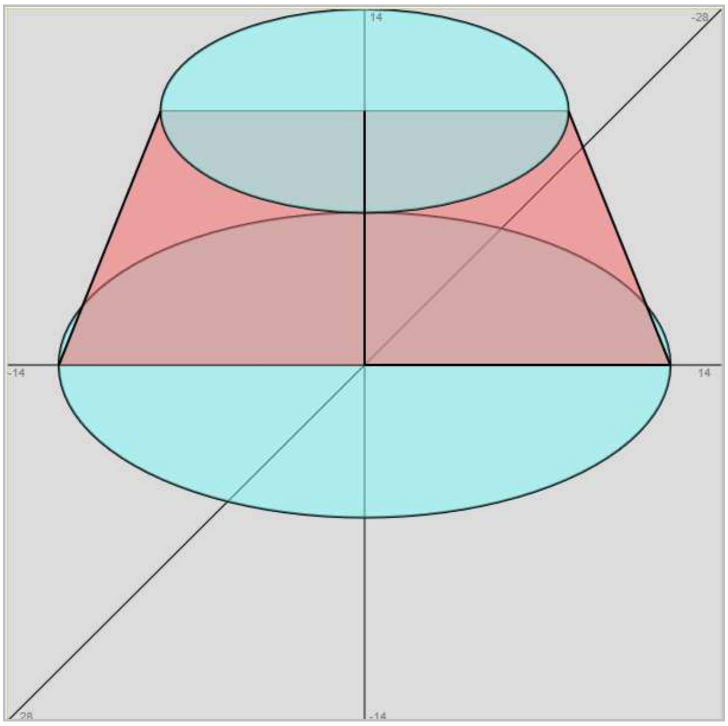
Mantellinie: $s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$ (Satz des Pythagoras)

Mantelfläche: $M = \pi s(r_1 + r_2)$

Oberfläche: $O = G_1 + G_2 + M = \pi\left(r_1^2 + s(r_1 + r_2) + r_2^2\right)$

Volumen: $V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

II. Der Kegelstumpf laut Aufgabenstellung hat das Aussehen:



III. Wir berechnen das Volumen V des Kegelstumpfs mit Hilfe der Volumenformel:

$$V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

und erhalten mit Grundflächenradius r_1 = 12 cm, Deckflächenradius r_2 = 8 cm und Höhe h = 10 cm:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 10 \cdot (12^2 + 12 \cdot 8 + 8^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 10 \cdot (144 + 96 + 64) = \frac{\pi}{3} \cdot 10 \cdot 304 = 3183{,}48 \text{ cm}^3$$

als gesuchtes Volumen.

IV. Zunächst ist die Mantellinie s des Kegelstumpfs zu ermitteln. Nach dem Satz des Pythagoras gilt die Beziehung:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$$

und damit:

$$s^2 = 10^2 + (12 - 8)^2 = 10^2 + 4^2 = 100 + 16 = 116,$$

woraus durch Wurzelziehen

$$s = \sqrt{116} = 10{,}77 \text{ cm}$$

folgt. Die Oberfläche O des Kegelstumpfs errechnet sich dann mit der Oberflächenformel

$$O = \pi\left(r_1^2 + s(r_1 + r_2) + r_2^2\right)$$

und mit Grundflächenradius r_1 = 12 cm, Deckflächenradius r_2 = 8 cm sowie Mantellinie s = 10,77 cm als:

$$O = \pi\left(12^2 + 10{,}77 \cdot (12 + 8) + 8^2\right) = \pi(144 + 10{,}77 \cdot 20 + 64) = \pi \cdot 423{,}4 = 1330{,}15 \text{ cm}^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 03.2017 / Aufgabe 319