Michael Buhlmann

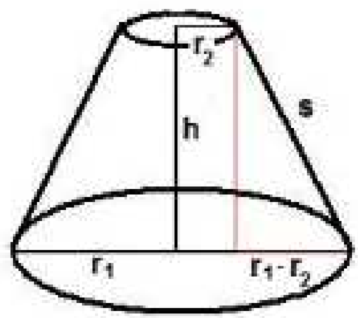
Mathematikaufgaben
> Geometrie
> Kegelstumpf

Aufgabe: Berechne Volumen und Oberfläche eines Kegelstumpfs mit Grundflächendurchmesser d_1 = 10 cm, Deckflächeninhalt G_2 = 50,27 cm^2 und Mantellinie s = 5 cm.

Lösung: I. Ein gerader Kreiskegelstumpf entsteht, wenn bei einem geraden Kreiskegel parallel zur Grundfläche ein Kegel abgeschnitten wird. Ein Kegelstumpf mit einem Kreis als Grundfläche und einem zweiten Kreis als Deckfläche ist durch die Radien r_1 und r_2 der Kreise und durch Stumpfhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G_1 und die Deckfläche G_2 sowie das Volumen V. Insbesondere gelten die Formeln:

Grundfläche, Radius unten: $G_1 = \pi r_1^2$, $r_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\pi}}$

Deckfläche, Radius oben: $G_2 = \pi r_2^2$, $r_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\pi}}$



Durchmesser/Grundfläche: $d_1 = 2r_1$, $r_1 = \frac{d_1}{2}$

Durchmesser/Deckfläche: $d_2 = 2r_2$, $r_2 = \frac{d_2}{2}$

Mantellinie: $s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$ (Satz des Pythagoras)

Mantelfläche: $M = \pi s(r_1 + r_2)$

Oberfläche: $O = G_1 + G_2 + M = \pi\left(r_1^2 + s(r_1 + r_2) + r_2^2\right)$

Volumen: $V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

II. Auf Grund von:

$$r_1 = \frac{d_1}{2}$$

bestimmt sich zunächst aus dem Grundflächendurchmesser d_1 = 10 cm der <u>Grundflächenradius</u> r_1 als:

$$r_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm.}$$

Weiter errechnen wir aus dem Deckflächeninhalt G_2 = 50,27 cm^2 mit Hilfe der Formel:

$$r_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\pi}}$$

den <u>Deckflächenradius</u> r_2 als:

$$r_2 = \sqrt{\frac{50{,}27}{\pi}} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm.}$$

III. Da die Mantellinie s des Kegelstumpfs als s = 5 cm gegeben ist, ermitteln wir zunächst mit der Oberflächenformel

$$O = \pi\left(r_1^2 + s(r_1 + r_2) + r_2^2\right)$$

und mit Grundflächenradius r_1 = 5 cm und Deckflächenradius r_2 = 4 cm die <u>Oberfläche</u> O des Kegelstumpfs:

$$O = \pi\left(5^2 + 5 \cdot (5+4) + 4^2\right) = \pi(25 + 5 \cdot 9 + 16) = \pi \cdot 86 = 270{,}18 \text{ cm}^2.$$

IV. Zur Volumenberechnung benötigen wir die Höhe h des Kegelstumpfs. Wir stellen die Mantellinienformel:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$$

daher nach h um und erhalten:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2 \qquad | -(r_1 - r_2)^2$$

$$s^2 - (r_1 - r_2)^2 = h^2$$

$$h^2 = s^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$h^2 = 5^2 - (5-4)^2 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24 \quad | \sqrt{}$$

$$h = \sqrt{24} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

Wir berechnen nun das <u>Volumen</u> V des Kegelstumpfs mit Hilfe der Volumenformel:

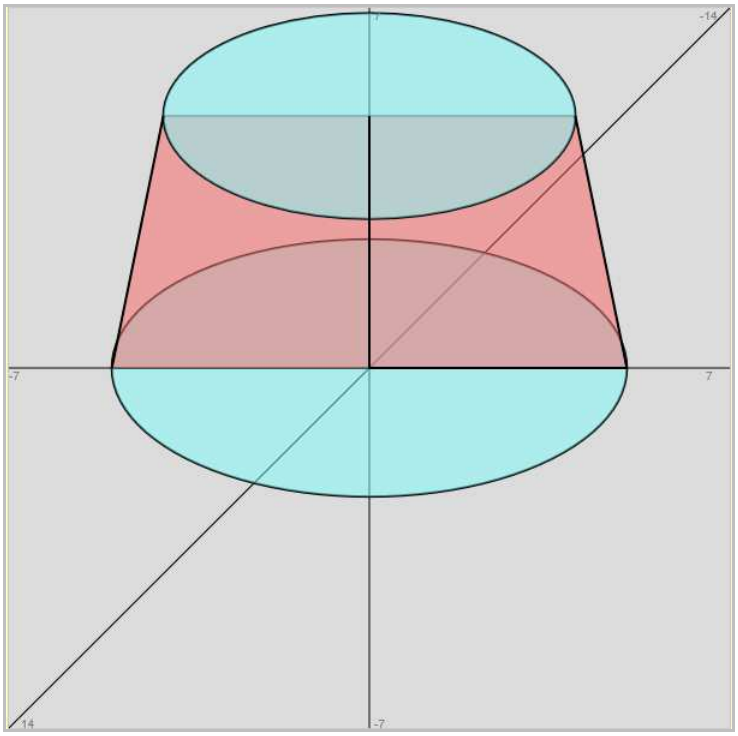
$$V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

und erhalten mit Grundflächenradius r_1 = 5 cm, Deckflächenradius r_2 = 5 cm und Höhe h = 4,9 cm:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 4{,}9 \cdot (5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 4{,}9 \cdot (25 + 20 + 16) = \frac{\pi}{3} \cdot 4{,}9 \cdot 61 = 313 \text{ cm}^3$$

als gesuchtes Volumen.

V. Der Kegelstumpf laut Aufgabenstellung hat das Aussehen:



www.michael-buhlmann.de / 03.2017 / Aufgabe 321