Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra/Arithmetik
> Komplexe Zahlen

Aufgabe: Berechne für reelle bzw. komplexe Zahlen x, y:

$$(x+iy)^3 .$$

Lösung: I. Die Erweiterung der reellen Zahlen **R** mit i = $\sqrt{-1}$ als imaginäre Einheit mit i^2 = -1 führt auf die komplexen Zahlen **C**, die wir als Paar von reellen Zahlen (a, b) = a + ib identifizieren und auf der Gaußschen Zahlenebene als Vektoren darstellen können. Die komplexen Zahlen **C** bilden bzgl. Addition + und Multiplikation · einen Zahlenkörper, d.h. es gelten die vom Reellen her bekannten Gesetzmäßigkeiten vermöge der Grundrechenarten für komplexe Zahlen z = z_1 = a + ib, z_2 = c + id:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$$
$$z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$$
$$z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$
$$z_1/z_2 = (a+ib)/(c+id) = (a+ib)(c-id)/[(c+id)(c-id)] = [ac-iad+ibc-i^2bd]/(c^2-i^2d^2) =$$
$$[(ac+bd)+i(bc-ad)]/(c^2+d^2) = (ac+bd)/(c^2+d^2) + i(bc-ad)/(c^2+d^2)$$

Zu z = a + ib gehören: der Realteil Re(z) = a, der Imaginärteil Im(z) = b, die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ = a – ib; es gilt: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, wobei der Betrag der komplexen Zahl $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ lautet.

II. Auch für komplexe Zahlen a, b gilt der binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \;\Rightarrow\; (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

III. Wir rechnen für reelle Zahlen x, y unter Verwendung von i^2 = -1 und des binomischen Lehrsatzes:

$$z = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y + 3xi^2y^2 + i^3y^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3 =$$
$$(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

Es folgt noch: Re(z) = $x^3 – 3xy^2$, Im(z) = $3x^2y – y^3$.

IV. Wir rechnen für komplexe Zahlen x, y unter Verwendung von $i^2 = -1$ und des binomischen Lehrsatzes:

$$z = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y + 3xi^2y^2 + i^3y^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 =$$

$$(\mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x))^3 + 3i(\mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x))^2(\mathrm{Re}(y) + i\,\mathrm{Im}(y)) - 3(\mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x))(\mathrm{Re}(y) + i\,\mathrm{Im}(y))^2 - i(\mathrm{Re}(y) + i\,\mathrm{Im}(y))^3 =$$

$$\mathrm{Re}^3(x) + 3i\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Im}(x) + 3i^2\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}^2(x) + i^3\,\mathrm{Im}^3(x) + 3i(\mathrm{Re}^2(x) + 2i\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}(x) + i^2\,\mathrm{Im}^2(x))(\mathrm{Re}(y) + i\,\mathrm{Im}(y))$$
$$- 3(\mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x))(\mathrm{Re}^2(y) + 2i\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}(y) + i^2\,\mathrm{Im}^2(y)) - i(\mathrm{Re}^3(y) + 3i\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Re}(y) + 3i^2\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}^2(y) + i^3\,\mathrm{Im}^3(y)) =$$

$$\mathrm{Re}^3(x) + 3i\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Im}(x) - 3\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}^2(x) - i\,\mathrm{Im}^3(x) + (3i\,\mathrm{Re}^2(x) - 6\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}(x) - 3i\,\mathrm{Im}^2(x))(\mathrm{Re}(y) + i\,\mathrm{Im}(y))$$
$$- (3\,\mathrm{Re}(x) + 3i\,\mathrm{Im}(x))(\mathrm{Re}^2(y) + 2i\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}(y) - \mathrm{Im}^2(y)) - i\,\mathrm{Re}^3(y) - 3\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Re}(y) + 3i\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}^2(y) - \mathrm{Im}^3(y) =$$

$$\mathrm{Re}^3(x) + 3i\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Im}(x) - 3\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}^2(x) - i\,\mathrm{Im}^3(x)$$
$$+ 3i\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Re}(y) - 3\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Im}(y) - 6\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}(y) - 6i\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Im}(y) - 3i\,\mathrm{Im}^2(x)\,\mathrm{Re}(y) + 3\,\mathrm{Im}^2(x)\,\mathrm{Im}(y)$$
$$- 3\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Re}^2(y) - 6i\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}(y) + 3\,\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}^2(y) - 3i\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}^2(y) + 6\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}(y) + 3i\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Im}^2(y)$$
$$- i\,\mathrm{Re}^3(y) - 3\,\mathrm{Re}^2(x)\,\mathrm{Re}(y) + 3i\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}^2(y) - \mathrm{Im}^3(y) =$$

$$\left(\mathrm{Re}^3(x) - 3\,\mathrm{Re}^2(x)(\mathrm{Re}(y) + \mathrm{Im}(y)) - 3\,\mathrm{Re}(x)(\mathrm{Re}^2(y) - 2\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}(y) + \mathrm{Im}^2(x) - \mathrm{Im}^2(y)) + 6\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}(y) + 3\,\mathrm{Im}^2(x)\,\mathrm{Im}(y) - \mathrm{Im}^3(y)\right)$$
$$+ \left(3\,\mathrm{Re}^2(x)(\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y)) - 6\,\mathrm{Re}(x)(\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y))\,\mathrm{Im}(y) - 3\,\mathrm{Im}(x)(\mathrm{Re}^2(y) - \mathrm{Im}^2(y)) - 3\,\mathrm{Im}^2(x)\,\mathrm{Re}(y) - \mathrm{Re}^3(y) - \mathrm{Im}^3(y)\right)i$$

Es folgt: Re(z) = $\mathrm{Re}^3(x) - 3\,\mathrm{Re}^2(x)(\mathrm{Re}(y) + \mathrm{Im}(y)) - 3\,\mathrm{Re}(x)(\mathrm{Re}^2(y) - 2\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}(y) + \mathrm{Im}^2(x) - \mathrm{Im}^2(y)) + 6\,\mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}(y)\,\mathrm{Im}(y) + 3\,\mathrm{Im}^2(x)\,\mathrm{Im}(y) - \mathrm{Im}^3(y)$,
Im(z) = $3\,\mathrm{Re}^2(x)(\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y)) - 6\,\mathrm{Re}(x)(\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y))\,\mathrm{Im}(y) - 3\,\mathrm{Im}(x)(\mathrm{Re}^2(y) - \mathrm{Im}^2(y)) - 3\,\mathrm{Im}^2(x)\,\mathrm{Re}(y) - \mathrm{Re}^3(y) - \mathrm{Im}^3(y)$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1255