Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra/Arithmetik
> Komplexe Zahlen

Aufgabe: Berechne:

$$\sqrt{6}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\pi}{4}i}.$$

Lösung: I. Die Erweiterung der reellen Zahlen **R** mit i = $\sqrt{-1}$ als imaginäre Einheit mit i^2 = -1 führt auf die komplexen Zahlen **C**, die wir als Paar von reellen Zahlen (a, b) = a + ib identifizieren und auf der Gaußschen Zahlenebene als Vektoren darstellen können. Die komplexen Zahlen **C** bilden bzgl. Addition + und Multiplikation · einen Zahlenkörper, d.h. es gelten die vom Reellen her bekannten Gesetzmäßigkeiten vermöge der Grundrechenarten für komplexe Zahlen z = z_1 = a + ib, z_2 = c + id:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$$
$$z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$$
$$z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$
$$z_1/z_2 = (a+ib)/(c+id) = (a+ib)(c-id)/[(c+id)(c-id)] = [ac-iad+ibc-i^2bd]/(c^2-i^2d^2) =$$
$$[(ac+bd)+i(bc-ad)]/(c^2+d^2) = (ac+bd)/(c^2+d^2) + i(bc-ad)/(c^2+d^2)$$

Zu z = a + ib gehören: der Realteil Re(z) = a, der Imaginärteil Im(z) = b, die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ = a – ib; es gilt: $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, wobei der Betrag der komplexen Zahl $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ lautet. Zudem lässt sich eine komplexe Zahl z darstellen als: $z=|z|\cdot e^{i\varphi}$, $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ auf Grund letztlich der Eulerschen Gleichung: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Damit zusammenhängend gelten die üblichen Potenz- und Logarithmengesetze.

II. Wir rechnen unter Verwendung der Potenz- und Logarithmengesetze sowie der Eulerschen Gleichung:

$$z=\sqrt{6}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{6}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln 3}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{6}\cdot e^{\ln 3^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{6}\cdot e^{\ln\sqrt{3}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=$$

$$\sqrt{18}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=3\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=3\sqrt{2}\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=$$

$$3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{3}{2}\cdot 2+i\cdot\frac{3}{2}\cdot 2=3+3i.$$

Es folgt noch: Re(z) = 3, Im(z) = 3.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1256