**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Algebra/Arithmetik
## > Komplexe Zahlen

---

**Aufgabe**: Berechne für reelle x, y:

$$\sin(x+iy).$$

**Lösung**: I. Die Erweiterung der reellen Zahlen **R** mit i = $\sqrt{-1}$ als imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ führt auf die komplexen Zahlen **C**, die wir als Paar von reellen Zahlen (a, b) = a + ib identifizieren und auf der Gaußschen Zahlenebene als Vektoren darstellen können. Die komplexen Zahlen **C** bilden bzgl. Addition + und Multiplikation · einen Zahlenkörper, d.h. es gelten die vom Reellen her bekannten Gesetzmäßigkeiten vermöge der Grundrechenarten für komplexe Zahlen $z = z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$$
$$z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$$
$$z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$
$$z_1/z_2 = (a+ib)/(c+id) = (a+ib)(c-id)/[(c+id)(c-id)] = [ac-iad+ibc-i^2bd]/(c^2-i^2d^2) =$$
$$[(ac+bd)+i(bc-ad)]/(c^2+d^2) = (ac+bd)/(c^2+d^2) + i(bc-ad)/(c^2+d^2)$$

Zu z = a + ib gehören: der Realteil Re(z) = a, der Imaginärteil Im(z) = b, die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ = a – ib; es gilt: $z\cdot\bar{z} = |z|^2$, wobei der Betrag der komplexen Zahl $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ lautet. Zudem lässt sich eine komplexe Zahl z darstellen als: $z = |z|\cdot e^{i\varphi}$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ auf Grund letztlich der Eulerschen Gleichung: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Damit zusammenhängend gelten die üblichen Potenz- und Logarithmengesetze.

II. Die Eulersche Gleichung führt weiter auf die trigonometrischen Funktionen. Aus:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

folgt durch Subtraktion der beiden Beziehungen:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) - (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2i\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

und damit eine Formel für den komplexen Sinus. Analog ergibt sich durch Addition:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

und damit der komplexe Kosinus.

III. Wir rechnen unter Verwendung der komplexen Sinus:

$$z = \sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i} =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}e^{ix} - e^y e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}(\cos(x) + i\sin(x)) - e^y(\cos(-x) + i\sin(-x))\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}(\cos(x) + i\sin(x)) - e^y(\cos(x) - i\sin(x))\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}\cos(x)+\frac{1}{e^y}i\sin(x)-e^y\cos(x)+e^y i\sin(x)\right)=$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}\cos(x)-e^y\cos(x)+\frac{1}{e^y}i\sin(x)+e^y i\sin(x)\right)=$$

$$\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)\cos(x)+\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)i\sin(x)\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)\cos(x)+\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)i\sin(x)=$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)\cos(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)\sin(x)=\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)\cos(x)+\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)i\sin(x)\right)=$$

$$\frac{1}{2i^2}\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)i\cos(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)\sin(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)i\cos(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)\sin(x)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)\sin(x)-i\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)\cos(x)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin(x)+i\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos(x)=$$

$$\cosh(y)\sin(x)+i\sinh(y)\cos(x)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y).$$

Es folgt noch: Re(z) = $\sin(x)\cdot\cosh(y)$, Im(z) = $\cos(x)\cdot\sinh(y)$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1257