

Mathematikaufgaben

> Komplexe Zahlen

> Grundrechnen

Aufgabe: Bestimme zur komplexen Zahl $z = 3+4i$:

Realteil, Imaginärteil ($\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$)

Betrag, Winkel ($|z|$, $\varphi = \tan^{-1}(\operatorname{Im}(z)/\operatorname{Re}(z))$)

Gegenzahl ($-z$)

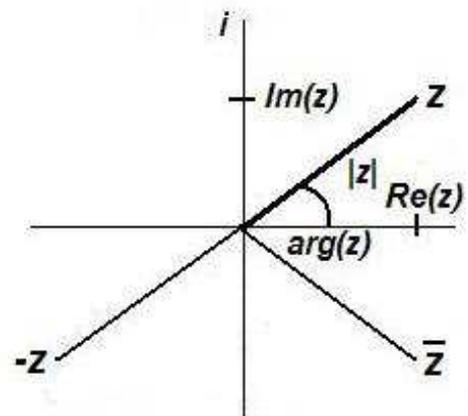
konjugiert-komplexe Zahl ($\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) \cdot i$).

Lösung: I. Komplexe Zahlen z lassen sich auf der Gaußschen Zahlenebene ($\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$) darstellen in kartesischen ($z = a+bi$) und Polarkoordinaten ($z = r e^{i\varphi}$) mit reellen Zahlen a als Real- ($a=\operatorname{Re}(z)$), b als Imaginärteil ($b=\operatorname{Im}(z)$) der komplexen Zahl, mit dem Betrag $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und dem Winkel (Argument) $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arg(z)$. Zu $z = a+bi$ ist $-z = -a-bi$ die

komplexe Gegenzahl, $\bar{z} = a - bi$ die konjugiert-komplexe Zahl. Für eine komplexe Zahl z gelten gemäß der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ die Normaldarstellungen:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad \bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

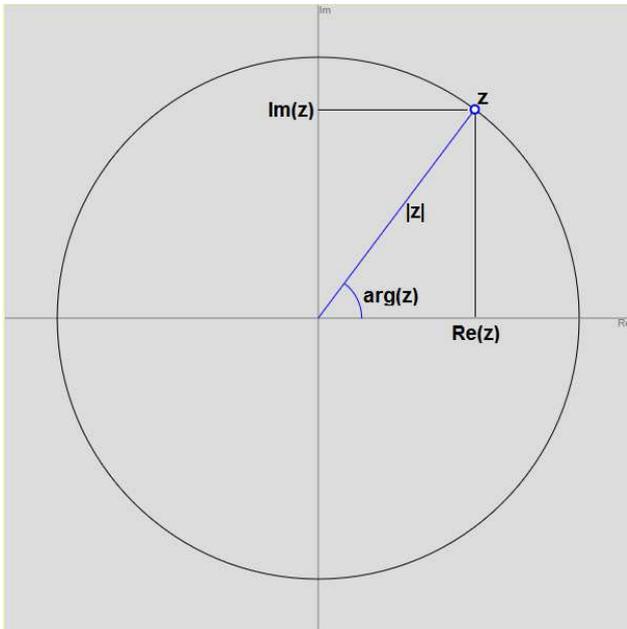
die den Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt sicher stellen.



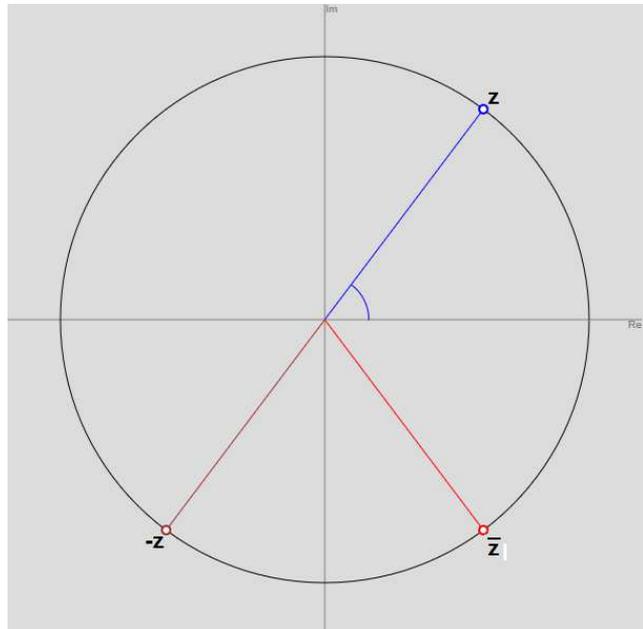
Komplexe Zahl, konjugiert-komplexe Zahl und Gegenzahl

II. Als Lösungen der oben aufgeführten einzelnen Teilaufgaben erhalten wir:

	Kartesische Koordinaten:	Polarkoordinaten:
Komplexe Zahl: $z =$	<input type="text" value="3"/> + <input type="text" value="4"/> *i	$= 5 * e^{i*0.9273}$
Real-, Imaginärteil:	Re $z =$ <input type="text" value="3"/>	Im $z =$ <input type="text" value="4"/>
Betrag, Winkel:	$ z =$ <input type="text" value="5"/>	$\varphi =$ <input type="text" value="53.13"/> °



Komplexe Zahl z



Komplexe Zahlen z, z⁻, -z

	Kartesische Koordinaten:	Polarkoordinaten:
Komplexe Zahl: $z =$	<input type="text" value="3"/> + <input type="text" value="4"/> *i	$= 5 * e^{i*0.9273}$
Real-, Imaginärteil:	Re $z =$ <input type="text" value="3"/>	Im $z =$ <input type="text" value="4"/>
Betrag, Winkel:	$ z =$ <input type="text" value="5"/>	$\varphi =$ <input type="text" value="53.13"/> °
Konjugiert-komplexe Zahl: z^{-} =	<input type="text" value="3"/> + <input type="text" value="-4"/> *i	$= 5 * e^{i*5.35589}$
Gegenzahl: $-z =$	<input type="text" value="-3"/> + <input type="text" value="-4"/> *i	$= 5 * e^{i*4.06889}$

www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 338