Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Komplexe Zahlen
> Grundrechnen

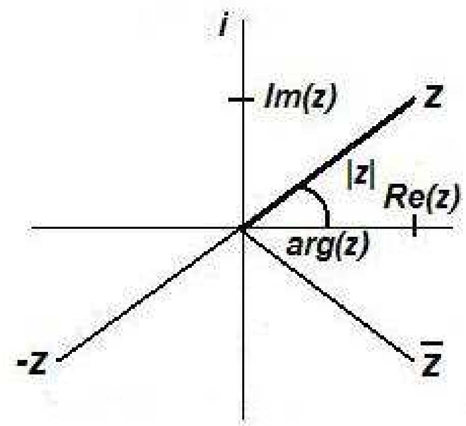
Aufgabe: Bestimme zu den komplexen Zahlen $z_1 = 4+i$ und $z_2 = -3+2i$ (jeweils):

Realteil, Imaginärteil (Re(z), Im(z))
Betrag, Winkel (|z|, $\varphi = \tan^{-1}(\mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z))$)
Gegenzahl (-z)
konjugiert-komplexe Zahl ($z^- = \mathrm{Re}(z) – \mathrm{Im}(z)\cdot i$)
Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division der beiden Zahlen (z_1+z_2, $z_1–z_2$, $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2)
Potenzieren, Logarithmieren ($z_1^{z_2}$, $\log_{z1}(z_2)$).

Lösung: I. Komplexe Zahlen z lassen sich auf der Gaußschen Zahlenebene (**C** = **R**x**R**) darstellen in kartesischen (z = a+bi) und Polarkoordinaten ($z = re^{\varphi}$) mit reellen Zahlen a als Real- (a=Re(z)), b als Imaginärteil (b=Im(z)) der komplexen Zahl, mit dem Betrag r = |z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ und dem Winkel (Argument) $\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) = \arg(z)$. Zu z = a+bi ist -z = -a–bi die komplexe Gegenzahl, $\overline{z} = a - bi$ die konjugiert-komplexe Zahl. Für eine komplexe Zahl z gelten gemäß der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ die Normaldarstellungen:

$$z = r\cdot e^{i\varphi},\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (0\leq\varphi<2\pi),$$

die den Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt sicher stellen.



Komplexe Zahl, konjugiert-komplexe Zahl und Gegenzahl

Es gelten für komplexe Zahlen z = a+bi = $r\cdot e^{i\varphi}$, $z_1 = a_1+b_1i = r_1\cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = a_2+b_2i = r_2\cdot e^{i\varphi_2}$ die folgenden Rechenregeln:

$$z_1 + z_2 = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \text{ (Addition)}$$

$$z_1 - z_2 = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i \text{ (Subtraktion)}$$

$$z_1\cdot z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2+a_2b_1)i,\ z_1\cdot z_2 = r_1r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \text{ (Multiplikation)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \text{ (Division)}$$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2},\ \overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2},\ \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \text{ (konjugiert komplexe Zahlen)}$$

$$z^n = r^n\cdot e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ (Potenzen)}$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n}\cdot e^{i\varphi/n} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi}{n})+i\sin(\frac{\varphi}{n})) \text{ (Wurzeln)}$$

$$\ln z = r + i\varphi \text{ (natürlicher Logarithmus).}$$

II. Als Lösungen der oben aufgeführten einzelnen Teilaufgaben erhalten wir:

1. komplexe Zahl:$\mathbf{z_1}$ = 4 + 1*i = 4.12311*(cos(0.24498)+i*sin(0.24498)) = 4.12311*(cos(14.03624°)+i*sin(14.03624°))

Real-, Imaginärteil: Re z_1 = 4, Im z_1 = 1; Betrag: $|z_1| = r_1$ = 4.12311, Winkel: φ_1 = 14.03624°

Konjugiert-komplexe Zahl: z_1^{-} = 4 - 1*i = 4.12311*(cos(6.03821)+i*sin(6.03821)) = 4.12311*(cos(345.96376°)+i*sin(345.96376°))

Gegenzahl: -z = -4 - 1*i = 4.12311*(cos(3.38657)+i*sin(3.38657)) = 4.12311*(cos(194.03624°)+i*sin(194.03624°))

2. komplexe Zahl: $\mathbf{z_2}$ = -3 + 2*i = 3.60555*(cos(2.55359)+i*sin(2.55359)) = 3.60555*(cos(146.30993°)+i*sin(146.30993°))

Real-, Imaginärteil: Re z_2 = -3, Im z_2 = 2; Betrag: $|z_2| = r_2$ = 3.60555, Winkel: φ_2 = 146.30993°

Konjugiert-komplexe Zahl: z_2^{-} = -3 - 2*i = 3.60555*(cos(3.7296)+i*sin(3.7296)) = 3.60555*(cos(213.69007°)+i*sin(213.69007°))

Gegenzahl: -z = 3 - 2*i = 3.60555*(cos(5.69518)+i*sin(5.69518)) = 3.60555*(cos(326.30993°)+i*sin(326.30993°))

Addition: $\mathbf{z_1 + z_2}$ = 1 + 3*i = 3.16228*(cos(1.24905)+i*sin(1.24905)) = 3.16228*(cos(71.56505°)+i*sin(71.56505°)); Betrag: |z| = r = 3.16228, Winkel: φ = 71.56505°

Subtraktion:$\mathbf{z_1 - z_2}$ = 7 - 1*i = 7.07107*(cos(6.14129)+i*sin(6.14129)) = 7.07107*(cos(351.8699°)+i*sin(351.8699°)); Betrag: |z| = r = 7.07107, Winkel: φ = 351.8699°

Multiplikation:$\mathbf{z_1 * z_2}$ = -14 + 5*i = 14.86607*(cos(2.79857)+i*sin(2.79857)) = 14.86607*(cos(160.34618°)+i*sin(160.34618°)); Betrag: |z| = r = 14.86607, Winkel: φ = 160.34618°

Division:$\mathbf{z_1 / z_2}$ = -0.76923 - 0.84615*i = 1.14354*(cos(3.97457)+i*sin(3.97457)) = 1.14354*(cos(227.72631°)+i*sin(227.72631°)); Betrag: |z| = r = 1.14354, Winkel: φ = 227.72631°

Potenzieren:$\mathbf{z_1^{z_2}}$ = -0.0044 + 0.00755*i = 0.00874*(cos(2.09828)+i*sin(2.09828)) = 0.00874*(cos(120.22244°)+i*sin(120.22244°)); Betrag: |z| = r = 0.00874, Winkel: φ = 120.22244°

Logarithmieren:$\mathbf{\log_{z_1} z_2}$ = 0.2991 - 0.40453*i = 0.5031*(cos(5.34905)+i*sin(5.34905)) = 0.5031*(cos(306.47823°)+i*sin(306.47823°)); Betrag: |z| = r = 0.5031, Winkel: φ = 306.47823°

www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 339