

Mathematikaufgaben

> Komplexe Zahlen

> Grundrechnen

Aufgabe: Bestimme zur komplexen Zahl $z = 1$ die 8. (Einheits-) Wurzeln.

Lösung: I. Komplexe Zahlen z lassen sich auf der Gaußschen Zahlenebene ($\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$) darstellen in kartesischen ($z = a+bi$) und Polarkoordinaten ($z = r e^{i\varphi}$) mit reellen Zahlen a als Real- ($a = \operatorname{Re}(z)$), b als Imaginärteil ($b = \operatorname{Im}(z)$) der komplexen Zahl, mit dem Betrag $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und dem Winkel (Argument) $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arg(z)$. Zu $z = a+bi$ ist $-z = -a-bi$ die komplexe Gegenzahl, $\bar{z} = a - bi$ die konjugiert-komplexe Zahl. Für eine komplexe Zahl z gelten gemäß der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ die Normaldarstellungen:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

die den Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt sicher stellen. Die komplexe Gleichung

$$z^n = 1 \quad (*)$$

besitzt n Lösungen, die als n -te Einheitswurzeln bezeichnet werden. Vermöge der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und mit der komplexen Darstellung $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ ergeben sich als Lösungen z_0, \dots, z_{n-1} von (*):

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Die Einheitswurzeln werden auch als $\zeta_{n,k}$ ($k = 0, \dots, n-1$) bezeichnet. Allgemeiner gilt bzgl. der n -ten Wurzeln der komplexen Gleichung

$$z^n = a \quad (**)$$

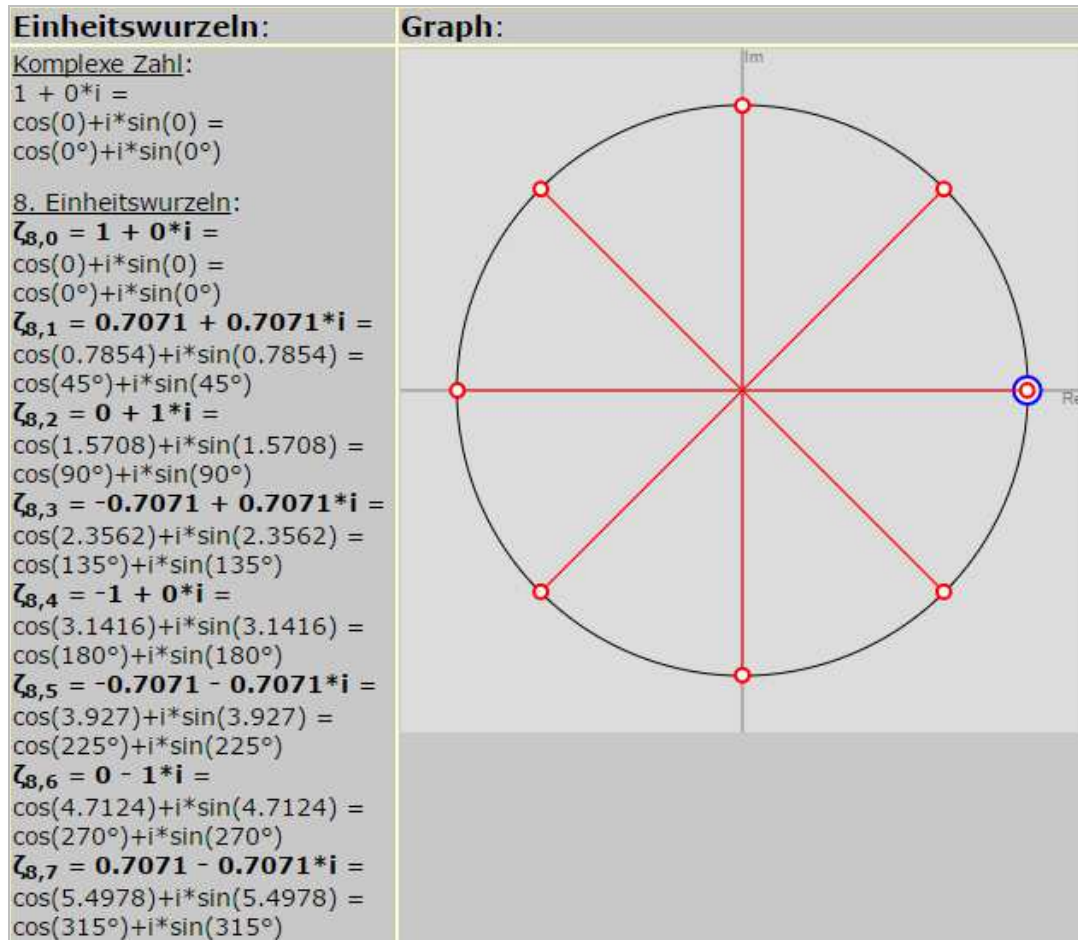
mit $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ als Lösungen von (**):

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

II. Es ergeben sich für die komplexe Zahl $z = 1$ vermöge der lösenden Gleichung:

$$\zeta^8 = z \Leftrightarrow \zeta^8 = 1$$

die nachstehenden 8. Einheitswurzeln:



www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 340