Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Komplexe Zahlen
> Grundrechnen

Aufgabe: Bestimme zur komplexen Zahl z = $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ die 12. Wurzeln.

Lösung: I. Komplexe Zahlen z lassen sich auf der Gaußschen Zahlenebene (**C** = **R**x**R**) darstellen in kartesischen (z = a+bi) und Polarkoordinaten (z = re^{φ}) mit reellen Zahlen a als Real- (a=Re(z)), b als Imaginärteil (b=Im(z)) der komplexen Zahl, mit dem Betrag r = |z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ und dem Winkel (Argument) $\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) = \arg(z)$. Zu z = a+bi ist -z = -a–bi die komplexe Gegenzahl, $\overline{z} = a - bi$ die konjugiert-komplexe Zahl. Für eine komplexe Zahl z gelten gemäß der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ die Normaldarstellungen:

$$z = r \cdot e^{i\varphi},\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (0\leq\varphi<2\pi),$$

die den Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt sicher stellen.
Die komplexe Gleichung

$$z^n = 1\ (*)$$

besitzt n Lösungen, die als n-te Einheitswurzeln bezeichnet werden. Vermöge der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und mit der komplexen Darstellung $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ ergeben sich als Lösungen z_0, … z_{n-1} von (*):

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots n-1.$$

Die Einheitswurzeln werden auch als $\zeta_{n,k}$ (k = 0, … n-1) bezeichnet. Allgemeiner gilt bzgl. der n-ten Wurzeln der komplexen Gleichung

$$z^n = a\ (**)$$

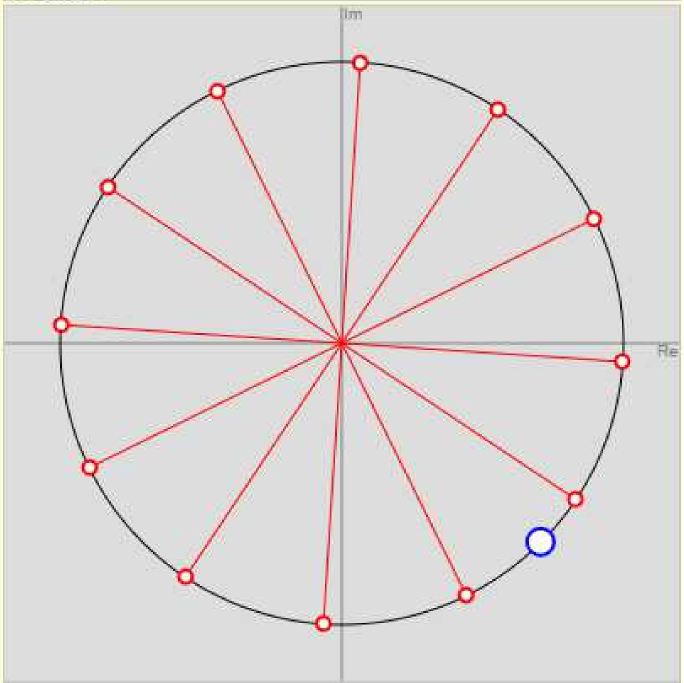
mit $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ als Lösungen von (**):

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, \ldots n-1.$$

II. Es ergeben sich für die komplexe Zahl z = $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ vermöge der lösenden Gleichung:

$\zeta^{12} = z \Leftrightarrow \zeta^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

die nachstehenden 12. Wurzeln:

Wurzeln:	**Graph**:
Komplexe Zahl: 0.7071 - 0.7071*i = cos(5.4978)+i*sin(5.4978) = cos(315°)+i*sin(315°) 12. Wurzeln: **$\zeta_{12,0}$ = 0.8969 + 0.4423*i** = cos(0.4581)+i*sin(0.4581) = cos(26.25°)+i*sin(26.25°) **$\zeta_{12,1}$ = 0.5556 + 0.8315*i** = cos(0.9817)+i*sin(0.9817) = cos(56.25°)+i*sin(56.25°) **$\zeta_{12,2}$ = 0.0654 + 0.9979*i** = cos(1.5053)+i*sin(1.5053) = cos(86.25°)+i*sin(86.25°) **$\zeta_{12,3}$ = -0.4423 + 0.8969*i** = cos(2.0289)+i*sin(2.0289) = cos(116.25°)+i*sin(116.25°) **$\zeta_{12,4}$ = -0.8315 + 0.5556*i** = cos(2.5525)+i*sin(2.5525) = cos(146.25°)+i*sin(146.25°) **$\zeta_{12,5}$ = -0.9979 + 0.0654*i** = cos(3.0761)+i*sin(3.0761) = cos(176.25°)+i*sin(176.25°) **$\zeta_{12,6}$ = -0.8969 - 0.4423*i** = cos(3.5997)+i*sin(3.5997) = cos(206.25°)+i*sin(206.25°) **$\zeta_{12,7}$ = -0.5556 - 0.8315*i** = cos(4.1233)+i*sin(4.1233) = cos(236.25°)+i*sin(236.25°) **$\zeta_{12,8}$ = -0.0654 - 0.9979*i** = cos(4.6469)+i*sin(4.6469) = cos(266.25°)+i*sin(266.25°) **$\zeta_{12,9}$ = 0.4423 - 0.8969*i** = cos(5.1705)+i*sin(5.1705) = cos(296.25°)+i*sin(296.25°) **$\zeta_{12,10}$ = 0.8315 - 0.5556*i** = cos(5.6941)+i*sin(5.6941) = cos(326.25°)+i*sin(326.25°) **$\zeta_{12,11}$ = 0.9979 - 0.0654*i** = cos(6.2177)+i*sin(6.2177) = cos(356.25°)+i*sin(356.25°)	

www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 341