

# Mathematikaufgaben

## > Komplexe Zahlen

### > Grundrechnen

---

**Aufgabe:** Bestimme zur komplexen Zahl  $z = -4+3i$  die 5. Wurzeln.

**Lösung:** I. Komplexe Zahlen  $z$  lassen sich auf der Gaußschen Zahlenebene ( $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ) darstellen in kartesischen ( $z = a+bi$ ) und Polarkoordinaten ( $z = r e^{i\varphi}$ ) mit reellen Zahlen  $a$  als Real- ( $a = \operatorname{Re}(z)$ ),  $b$  als Imaginärteil ( $b = \operatorname{Im}(z)$ ) der komplexen Zahl, mit dem Betrag  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  und dem Winkel (Argument)  $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arg(z)$ . Zu  $z = a+bi$  ist  $-z = -a-bi$  die komplexe Gegenzahl,  $\bar{z} = a - bi$  die konjugiert-komplexe Zahl. Für eine komplexe Zahl  $z$  gelten gemäß der Eulerschen Gleichung  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  die Normaldarstellungen:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

die den Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt sicher stellen. Die komplexe Gleichung

$$z^n = 1 \quad (*)$$

besitzt  $n$  Lösungen, die als  $n$ -te Einheitswurzeln bezeichnet werden. Vermöge der Eulerschen Gleichung  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  und mit der komplexen Darstellung  $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$  ergeben sich als Lösungen  $z_0, \dots, z_{n-1}$  von (\*):

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Die Einheitswurzeln werden auch als  $\zeta_{n,k}$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) bezeichnet. Allgemeiner gilt bzgl. der  $n$ -ten Wurzeln der komplexen Gleichung

$$z^n = a \quad (**)$$

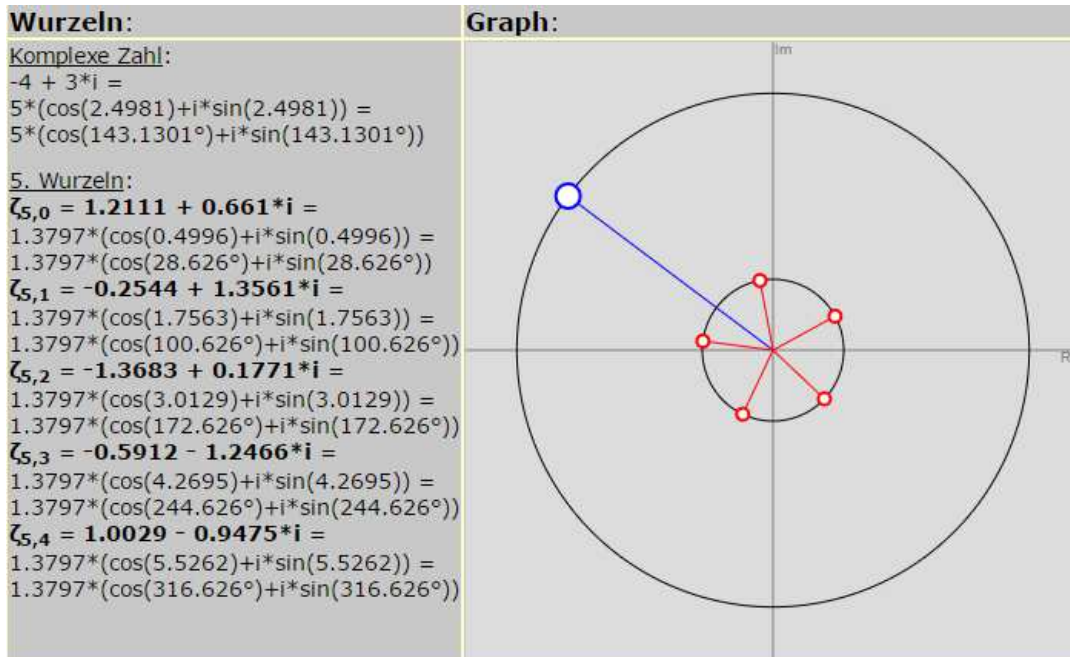
mit  $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  als Lösungen von (\*\*):

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

II. Es ergeben sich für die komplexe Zahl  $z = -4+3i$  vermöge der lösenden Gleichung:

$$\zeta^5 = z \Leftrightarrow \zeta^5 = -4+3i$$

die nachstehenden 5. Wurzeln:



www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 341