Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Komplexe Zahlen
> Wurzeln

Aufgabe: Bestimme die komplexen Lösungen der Gleichung: $z^8 = 256$.

Lösung: I. Komplexe Zahlen z lassen sich auf der Gaußschen Zahlenebene (**C** = **R**x**R**) darstellen in kartesischen (z = a+bi) und Polarkoordinaten ($z = re^{\varphi}$) mit reellen Zahlen a als Real- (a=Re(z)), b als Imaginärteil (b=Im(z)) der komplexen Zahl, mit dem Betrag r = |z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ und dem Winkel (Argument) $\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) = \arg(z)$. Zu z = a+bi ist -z = -a–bi die komplexe Gegenzahl, $\overline{z} = a - bi$ die konjugiert-komplexe Zahl. Für eine komplexe Zahl z gelten gemäß der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ die Normaldarstellungen:

$$z = r \cdot e^{i\varphi},\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

die den Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt sicher stellen.
Die komplexe Gleichung

$$z^n = 1\ (*)$$

besitzt n Lösungen, die als n-te Einheitswurzeln bezeichnet werden. Vermöge der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und mit der komplexen Darstellung $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ ergeben sich als Lösungen $z_0, \dots z_{n-1}$ von (*):

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \text{ k = 0, … n-1.}$$

Die Einheitswurzeln werden auch als $\zeta_{n,k}$ (k = 0, … n-1) bezeichnet. Allgemeiner gilt bzgl. der n-ten Wurzeln der komplexen Gleichung

$$z^n = a\ (**)$$

mit $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ als Lösungen von (**):

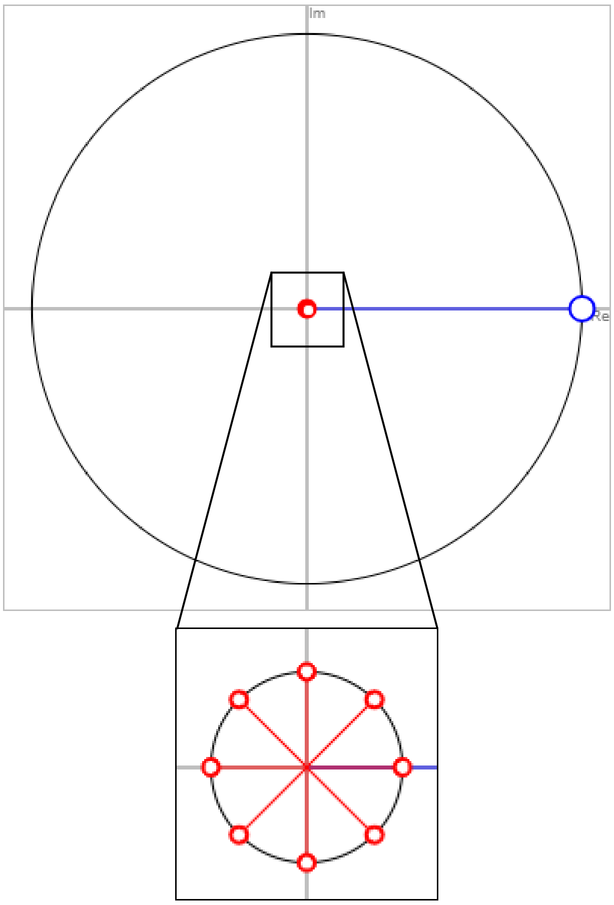
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \text{ k = 0, … n-1 bzw.}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right), \text{ k = 0, … n-1.}$$

II. Die Gleichung $z^8 = 256$ ist von der Form (**) mit a = 256 (mit: |a| = 256, arg(a) = 0). Demgemäß ergeben sich als Lösungen die 8. Wurzeln:

$\zeta_{8,0}$ = **2 + 0*i** = 2*(cos(0)+i*sin(0)) = 2*(cos(0°)+i*sin(0°))
$\zeta_{8,1}$ = **1.4142 + 1.4142*i** = 2*(cos(0.7854)+i*sin(0.7854)) = 2*(cos(45°)+i*sin(45°))
$\zeta_{8,2}$ = **0 + 2*i** = 2*(cos(1.5708)+i*sin(1.5708)) = 2*(cos(90°)+i*sin(90°))
$\zeta_{8,3}$ = **-1.4142 + 1.4142*i** = 2*(cos(2.3562)+i*sin(2.3562)) = 2*(cos(135°)+i*sin(135°))
$\zeta_{8,4}$ = **-2 + 0*i** = 2*(cos(3.1416)+i*sin(3.1416)) = 2*(cos(180°)+i*sin(180°))
$\zeta_{8,5}$ = **-1.4142 - 1.4142*i** = 2*(cos(3.927)+i*sin(3.927)) = 2*(cos(225°)+i*sin(225°))
$\zeta_{8,6}$ = **0 - 2*i** = 2*(cos(4.7124)+i*sin(4.7124)) = 2*(cos(270°)+i*sin(270°))
$\zeta_{8,7}$ = **1.4142 - 1.4142*i** = 2*(cos(5.4978)+i*sin(5.4978)) = 2*(cos(315°)+i*sin(315°))

mit:



www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1275