Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Komplexe Zahlen
> Wurzeln

Aufgabe: Bestimme die komplexen Lösungen der Gleichung: $z^4 = 16i$.

Lösung: I. Komplexe Zahlen z lassen sich auf der Gaußschen Zahlenebene (**C** = **R**x**R**) darstellen in kartesischen (z = a+bi) und Polarkoordinaten ($z = re^{\varphi}$) mit reellen Zahlen a als Real- (a=Re(z)), b als Imaginärteil (b=Im(z)) der komplexen Zahl, mit dem Betrag r = |z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ und dem Winkel (Argument) $\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) = \arg(z)$. Zu z = a+bi ist -z = -a–bi die komplexe Gegenzahl, $\bar{z} = a - bi$ die konjugiert-komplexe Zahl. Für eine komplexe Zahl z gelten gemäß der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ die Normaldarstellungen:

$$z = r \cdot e^{i\varphi},\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (0 \le \varphi < 2\pi),$$

die den Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt sicher stellen.
Die komplexe Gleichung

$$z^n = 1\ (*)$$

besitzt n Lösungen, die als n-te Einheitswurzeln bezeichnet werden. Vermöge der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und mit der komplexen Darstellung $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ ergeben sich als Lösungen $z_0, \ldots z_{n-1}$ von (*):

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots n-1.$$

Die Einheitswurzeln werden auch als $\zeta_{n,k}$ (k = 0, … n-1) bezeichnet. Allgemeiner gilt bzgl. der n-ten Wurzeln der komplexen Gleichung

$$z^n = a\ (**)$$

mit $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ als Lösungen von (**):

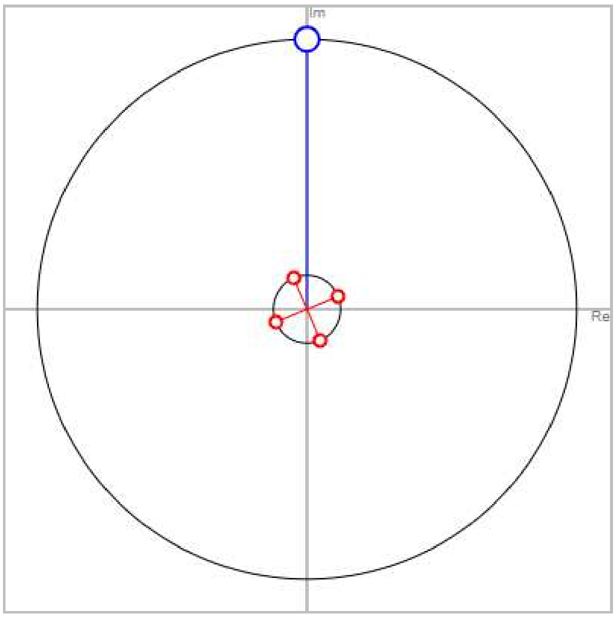
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, \ldots n-1 \text{ bzw.}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, \ldots n-1.$$

II. Die Gleichung $z^4 = 256$ ist von der Form (**) mit a = 16i (mit: |a| = 16, arg(a) = π/2). Demgemäß ergeben sich als Lösungen die 4. Wurzeln:

$\zeta_{4,0}$ = 1.8478 + 0.7654*i = 2*(cos(0.3927)+i*sin(0.3927)) = 2*(cos(22.5°)+i*sin(22.5°))
$\zeta_{4,1}$ = -0.7654 + 1.8478*i = 2*(cos(1.9635)+i*sin(1.9635)) = 2*(cos(112.5°)+i*sin(112.5°))
$\zeta_{4,2}$ = -1.8478 - 0.7654*i = 2*(cos(3.5343)+i*sin(3.5343)) = 2*(cos(202.5°)+i*sin(202.5°))
$\zeta_{4,3}$ = 0.7654 - 1.8478*i = 2*(cos(5.1051)+i*sin(5.1051)) = 2*(cos(292.5°)+i*sin(292.5°))

mit:



www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1276