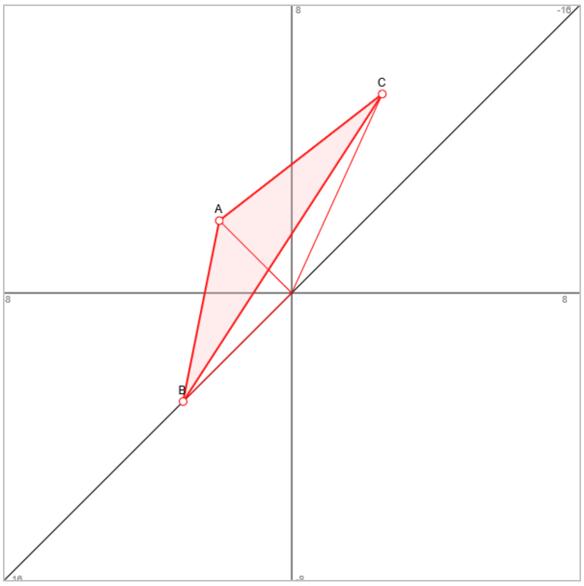
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Flächeninhalt eines Dreiecks

Aufgabe: Die Punkte A(2|-1|3), B(2|-2|-2) und C(-1|2|5) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Berechne dessen Flächeninhalt.



1. Lösung: I. Für die Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ΔABC kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt für den Betrag des so erhaltenen Kreuzproduktvektors:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$$

mit dem Winkel φ als eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Der Betrag des Kreuzproduktvektors ist also die Fläche des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Die halbe Parallelogrammfläche ist eine Dreiecksfläche.

II. Für ein Dreieck ΔABC gilt mithin die Flächeninhaltsformel:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|,$$

wenn $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ die von der Ecke A ausgehenden Differenzvektoren zwischen den Dreiecksecken sind (auch $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ bzw. $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ sind möglich).

III. Wir bilden aus den Ecken des Dreiecks ΔABC die Differenzvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das <u>Kreuzprodukt</u> errechnet sich als:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag des Kreuzprodukts lautet dann:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{13^2 + 15^2 + (-3)^2} = \sqrt{403} = 20{,}075.$$

Der <u>Dreiecksflächeninhalt</u> ist somit:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 20{,}075 = 10{,}037 \text{ FE}$$

groß.

2. Lösung: I. Wir verwenden die Methode der Abstandsbestimmung zwischen Punkt P und Gerade g z.B. vermöge des <u>Hilfsebenenverfahrens</u>. Dazu sei die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ mit Stütz- und Richtungsvektor, $\overrightarrow{OP}$ der Ortsvektor zum Punkt P, der nicht auf der Geraden liegt. Die Konstruktion einer Hilfsebene E_H, die senkrecht zur Geraden g steht und den Punkt P enthält, führt mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u}$ auf: E_H: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$. Der Schnittpunkt F von der Geraden g und der Ebene E_H ist der sog. Lotfußpunkt zum Punkt P auf der Geraden g. Der Betrag d(P,g) = d(P,F) = $\left|\overrightarrow{PF}\right|$ ist der Abstand zwischen Punkt P und Gerade g.

II. Im Dreieck ΔABC lässt sich durch die Ecken A und B eine Gerade g führen, der Abstand der Ecke C zur Geraden g ist die Höhe des Dreiecks, also: h = d(C,g) = $\left|\overrightarrow{CF}\right|$ mit Lotfußpunkt F. Die Grundseite beträgt: g = $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Der <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ergibt sich aus:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} gh.$$

III. Die <u>Gerade</u> g durch die Ecken A(2|-1|3) und B(2|-2|-2) des Dreiecks ΔABC bestimmt sich als:

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

IV. Zur Abstandsbestimmung zwischen der Ecke C(-1|2|5) des Dreiecks ΔABC und der Geraden g bilden wir mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und des Stützvektors $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ die <u>Hilfsebene</u>:

E_H: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ⇔ E_H: $-x_2 - 5x_3 = 0 - 2 - 25$ ⇔ E_H: $-x_2 - 5x_3 = -27$ ⇔ E_H: $x_2 + 5x_3 = 27$.

V. Der Schnittpunkt zwischen Gerade g und Hilfsebene E_H ist der Lotfußpunkt F. Dieser errechnet sich gemäß:

g -> $x_1 = 2$, $x_2 = -1-t$, $x_3 = 3-5t$ -> E_H -> $(-1-t) + 5(3-5t) = 27$ ⇔ $14 - 26t = 27$ ⇔ $-26t = 13$ ⇔

t = -0,5 -> $\vec{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$ -> F(2|-0,5|5,5).

VI. Die Grundseite des Dreiecks ΔABC errechnet sich als:

g = $\left|\vec{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$ = 5,1 LE.

VII. Die Höhe des Dreiecks ΔABC bestimmt sich als:

h = $\left|\vec{CF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + (-2{,}5)^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{15{,}5}$ = 3,94 LE.

VIII. Der Dreiecksflächeninhalt ist somit:

$A_\Delta = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 5{,}1 \cdot 3{,}94 = 10{,}047$ FE.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 994