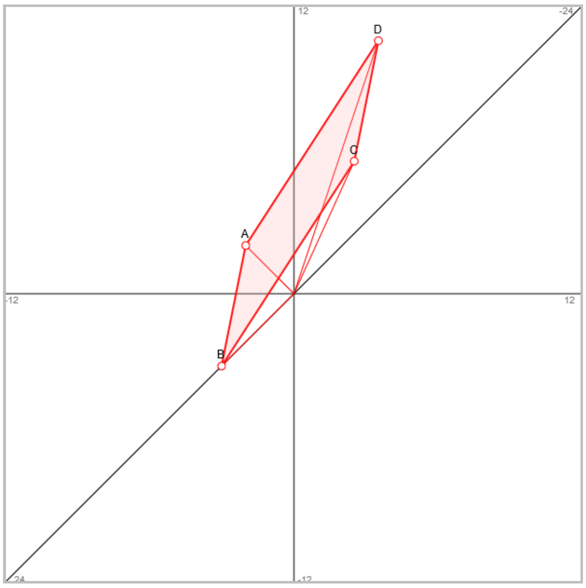
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Flächeninhalt eines Parallelogramms

Aufgabe: Die Punkte A(2|-1|3), B(2|-2|-2) und C(-1|2|5) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Ergänze das Dreieck zu einem Parallelogramm mit Ecke D. Berechne den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.



Lösung: I. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein Dreieck ΔABC zu einem Parallelogramm ABCD zu ergänzen. Dazu wird die Tatsache genutzt, dass jeweils die zwei gegenüberliegende Parallelogrammseiten charakterisierenden Differenzvektoren gleich sind; dabei gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ bzw. } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD},$$

woraus u.a.:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$

für eine fehlende Ecke D folgt.

II. Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms ABCD kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt für den Betrag des so erhaltenen Kreuzproduktvektors:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$$

mit dem Winkel φ als eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Der Betrag des Kreuzproduktvektors ist also die Fläche des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Für ein Parallelogramm ABCD gilt mithin die Flächeninhaltsformel:

$$A_P = \left|\vec{AB} \times \vec{AD}\right|,$$

wenn $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ die von der Ecke A ausgehenden Differenzvektoren zwischen Parallelogrammecken sind (auch $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ bzw. $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ usw. sind möglich).

III. Gemäß der Beziehung $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$ ergänzen wir das Dreieck ΔABC zu einem Parallelogramm ABCD durch Hinzufügung der Ecke D vermöge:

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und:

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix},$$

also: D(-1|3|10).

IV. Wir errechnen den Differenzvektor:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und haben (siehe III.):

$$\vec{AD} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt errechnet sich als:

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag des Kreuzprodukts ist der Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$A_P = \left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{13^2 + 15^2 + (-3)^2} = \sqrt{403} = 20{,}075 \text{ FE}.$$

(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 996