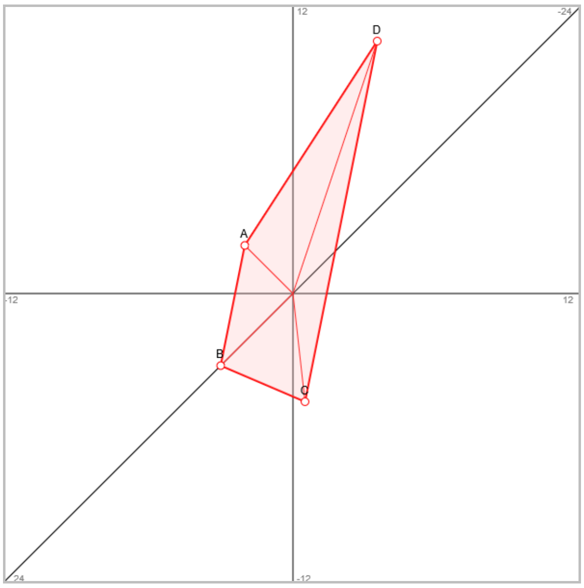
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Flächeninhalt eines Trapezes

Aufgabe: Die Punkte A(2|-1|3), B(2|-2|-2), C(-1|0|-5), D(-1|3|10) sind die Eckpunkte eines Vierecks. Zeige, dass das Viereck ein Trapez ist. Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes.



Lösung: I. Ein Viereck ist ein Trapez, wenn zwei, gegenüberliegende Trapezseiten charakterisierende Differenzvektoren Vielfache voneinander sind, d.h. wenn gilt:

$$\vec{AB} = k \cdot \vec{CD} \text{ oder } \vec{AD} = k \cdot \vec{BC}.$$

II. Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes ABCD kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt für den Betrag des so erhaltenen Kreuzproduktvektors:

$$\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi$$

mit dem Winkel φ als eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Der Betrag des Kreuzproduktvektors ist also die Fläche des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Die halbe Parallelogrammfläche ist eine Dreiecksfläche.

III. Um den Flächeninhalt eines Trapezes ABCD zu ermitteln, ist das Trapez durch eine Diagonale von A nach C (oder von B nach D) in zwei Dreiecke ΔABC und ΔACD (oder ΔABD und ΔBCD) zu unterteilen. In jedem der Dreiecke ist der Flächeninhalt gleich dem halben Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den von einer Ecke ausgehenden Differenzvektoren aufgespannt wird, also z.B.:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|,\ A_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\left|\vec{AC}\times\vec{AD}\right| \text{ (oder: } A_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AD}\right|,\ A_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\vec{BC}\times\vec{BD}\right|\text{).}$$

Der Flächeninhalts des Trapezes ABCD ist dann die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ΔABC und ΔACD (oder ΔABD und ΔBCD):

$$A_{Tr} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| + \frac{1}{2}\left|\vec{AC}\times\vec{AD}\right| = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| + \left|\vec{AC}\times\vec{AD}\right|\right)$$

$$\text{(oder: } A_{Tr} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AD}\right| + \frac{1}{2}\left|\vec{BC}\times\vec{BD}\right| = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{AB}\times\vec{AD}\right| + \left|\vec{BC}\times\vec{BD}\right|\right)\text{).}$$

IV. Wir sehen, dass mit den Differenzvektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

die Beziehung:

$$-3\vec{AB} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ oder: } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\vec{CD} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

gilt, womit die Parallelität der Vektoren folgt und der Nachweis des Vierecks ABCD als Trapez gelingt.

V. Wir teilen das Trapez ABCD entlang der Diagonalen zwischen A und C auf und berechnen alle notwendigen Differenzvektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix},\ \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die benötigten Kreuzprodukte bestimmen sich als:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{AC}\times\vec{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 45 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt des Trapezes ist folglich:

$$A_{Tr} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| + \left|\vec{AC}\times\vec{AD}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 39 \\ 45 \\ -9 \end{pmatrix}\right|\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{13^2 + 15^2 + (-3)^2} + \sqrt{39^2 + 45^2 + (-9)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{403} + \sqrt{3627}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{403} + 3\sqrt{403}\right) = 2\sqrt{403}$$

≈ 40,15 FE.

(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 997