Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Schnittpunkt zwischen Dreieck und Gerade

Aufgabe: Die Punkte A(3|-10|-2), B(9|-2|4), C(8|0|8) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zudem ist die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechne Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) Die Gerade schneidet die Dreieckfläche. Bestimme den Schnittpunkt S und begründe, dass der Schnittpunkt innerhalb der Dreieckfläche liegt.

Lösung: a) I. Zur Berechnung des Umfangs des Dreiecks ABC benötigen wir die Längen der Dreiecksseiten und haben daher zunächst die Differenzvektoren zwischen den Ecken A, B, C zu bilden:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix},\ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Längen der Differenzvektoren betragen:

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+8^2+6^2} = 2\sqrt{34},\ \left|\vec{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+10^2+10^2} = 15,\ \left|\vec{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+4^2} = \sqrt{21}$$

und der <u>Umfang</u> des Dreiecks lautet:

$$u = \left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{AC}\right| + \left|\vec{BC}\right| = 2\sqrt{34} + 15 + \sqrt{21} \approx 31{,}24 \text{ LE.}$$

II. Für den zu errechnenden Flächeninhalt des Dreiecks ABC benötigen wir das Kreuzprodukt:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ 20 \end{pmatrix},$$

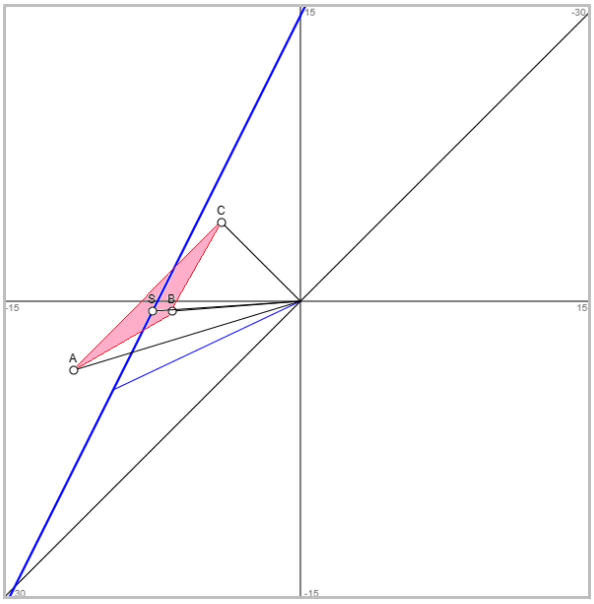
so dass sich als <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ergibt:

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ 20 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{20^2+30^2+20^2} = \frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{17} = 5\sqrt{17} \approx 20{,}62 \text{ FE.}$$

b) I. Hinsichtlich der Schnittpunktberechnung zwischen Dreieck und Gerade ist zunächst zu verweisen auf die Schnittpunktberechnung zwischen Gerade und Ebene, in der das Dreieck liegt. Sind die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks gegeben, so lassen sich daraus die Parameter- und/oder die Koordinatengleichung der Ebene, auf der das Dreieck liegt, bestimmen. Hier ist es indes vorteilhafter, die Parameterform der Ebene zu verwenden, denn es muss ja noch festgestellt werden, ob der Schnittpunkt innerhalb der Dreieckfläche liegt. Dies geht aber nur über die diesbezüglich zu errechnenden Parameter. Ist nämlich das Dreieck ABC vorgegeben und damit die Parametergleichung der Ebene E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$, so liegen die Ecken des Dreiecks bei r=s=0 (Ecke A), r=1, s=0 (Ecke B), r=0, s=1 (Ecke C). Die Dreieckfläche enthält mithin die Punkte, für die gilt:

$$r, s \geq 0,\ r+s \leq 1 \ (*).$$

Schneiden sich also eine Gerade g und die Ebene E innerhalb der Fläche des Dreiecks ABC, so müssen die Parameter des Schnittpunkts C also den Bedingungen (*) genügen.



II. Die Differenzvektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ wurden schon berechnet. Somit gilt für die das Dreieck ABC enthaltende Ebenengleichung in Parameterform:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen die vorgegebene Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Ebene E gleich und erhalten ein lineares Gleichungssystem mit den drei Parametern r, s, t, also:

g∩E ->

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad | -t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

-> lineares Gleichungssystem.

Das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gauß-Algorithmus wie folgt gelöst:

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
+ & 6r & + & 5s & + & 2t & = & 6 \\
+ & 8r & + & 10s & - & 1t & = & 5 \\
+ & 6r & + & 10s & - & 3t & = & 2
\end{array}
$$

Anfangstableau:

$$
\begin{array}{rrr|r}
6 & 5 & 2 & 6 \\
8 & 10 & -1 & 5 \\
6 & 10 & -3 & 2
\end{array}
$$

1. Schritt: 3*(*2*) - 4*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

$$
\begin{array}{rrr|r}
6 & 5 & 2 & 6 \\
0 & 10 & -11 & -9 \\
0 & 5 & -5 & -4
\end{array}
$$

2. Schritt: 2*(*3*) - 1*(*2*) /

$$
\begin{array}{rrr|r}
6 & 5 & 2 & 6 \\
0 & 10 & -11 & -9 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
+ & 6r & + & 5s & + & 2t & = & 6 \\
 & & + & 10s & - & 11t & = & -9 \\
 & & & & + & 1t & = & 1
\end{array}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$t = 1$
$s = 0.2$
$r = 0.5$

Das lineare Gleichungssystem ist also lösbar, es gibt zudem einen Schnittpunkt S, der wegen der Parameter r = 0,5 und s = 0,2 (wegen r+s = 0,5+0,2 = 0,7 < 1) in der Fläche des Dreiecks ABC liegt. Die Koordinaten des Schnittpunktes bestimmen sich am einfachsten durch Einsetzen des Parameters t = 1 in die Geradengleichung g:

g -> $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ -> Schnittpunkt S(7|-4|3).

Damit ist der Schnittpunkt gefunden.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 05.2023 / Aufgabe 1871