Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Kreuzprodukt/Vektorprodukt

Aufgabe: Zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ so zu bestimmen, dass alle drei Vektoren jeweils aufeinander senkrecht stehen.

Lösung: I. Für die Berechnung von Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt gilt die Formel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

und die Orthogonalität von $\vec{a} \times \vec{b}$ zu $\vec{a}$, $\vec{b}$.

II. Zu einem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ sind z.B. die Vektoren $\begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ -a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ jeweils orthogonal zum Vektor $\vec{a}$.

III. Wir konstruieren gemäß II. zunächst einen auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehenden Vektor, indem wir beispielsweise die x_3-Koordinate von $\vec{a}$ Null setzen, x_1- und x_2-Koordinate vertauschen und bei der x_1-Koordinate das Vorzeichen ändern; es ergibt sich der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, so dass in der Tat das Skalarprodukt verschwindet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ = -2·(-4) – 4·2 + 3·0 = 0.

IV. Der nun zu konstruierende Vektor $\vec{c}$ soll senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen. Wir errechnen daher den Vektor $\vec{c}$ über das Kreuzprodukt. Das Kreuzprodukt bestimmt sich als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-4) - (-2) \cdot 0 \\ -2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix} -2 & -4 \\ -4 & 2 \end{matrix}$$

(<- Wiederholung der ersten Zeilen der beiden Vektoren zur besseren Rechnung) so dass als Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}$ ergibt.

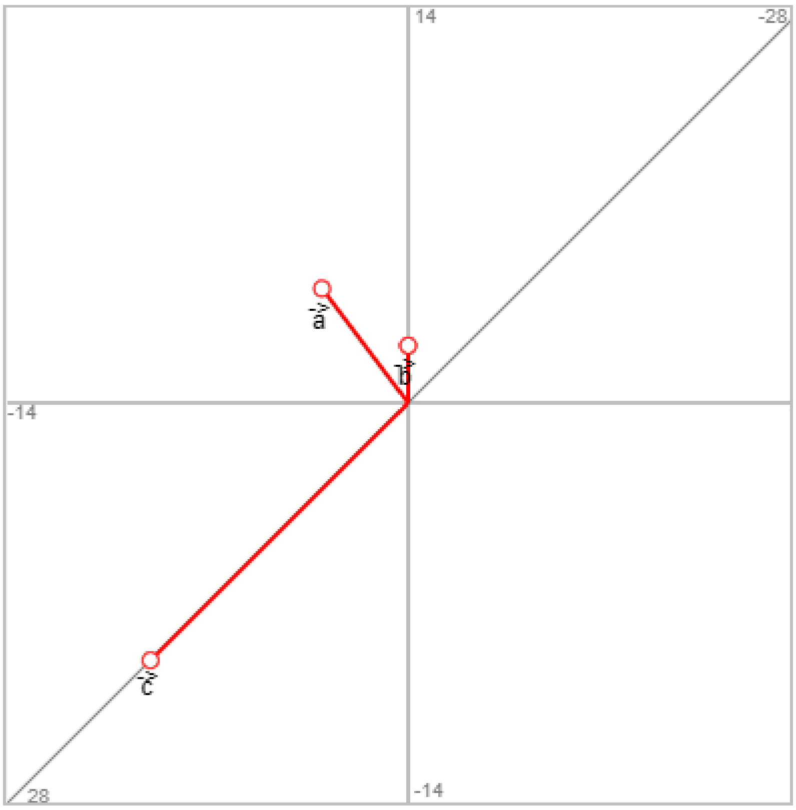
V. Wir machen noch die <u>Probe</u> und erhalten:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ = -2·(-4) – 4·2 + 3·0 = 8 – 8 + 0 = 0 (s.o.)

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}$ = -2·(-6) – 4·(-12) + 3·(-12) = -12 + 48 – 36 = 0

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}$ = -4·(-6) + 2·(-12) + 0·(-12) = 24 – 24 + 0 = 0.

Damit stehen alle drei Vektoren jeweils aufeinander senkrecht oder: je zwei Vektoren stehen aufeinander senkrecht.



www.michael-buhlmann.de / 04.2024 / Aufgabe 2044