

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist das Polynom, die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung durch, d.h.: Definitionsbereich der Funktion, Nullstellenbestimmung, Ableitungen, Bestimmung der Extremstellen, Bestimmung der Wendepunkte, Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten, Verhalten der Funktion im Unendlichen, Wertetabelle, Zeichnung.

Lösung: I. Definitionsbereich: $D_f = \mathbf{R}$. Das Polynom ist für alle $x \in \mathbf{R}$ definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar.

II. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel): $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ (Funktion),

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ (1. Ableitung), $f''(x) = 6x - 12$ (2. Ableitung), $f'''(x) = 6$ (3. Ableitung)

III. Nullstellen: Geratene Nullstelle bei $x=1$ mit $f(1) = 0$ und Polynomdivision:

$$(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) : (x - 1) = x^2 - 5x + 4$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - x^2) \\ \hline -5x^2 + 9x \\ -(-5x^2 + 5x) \\ \hline 4x - 4 \\ -(4x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

ergeben beim Nullsetzen der Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee [x = 1] \vee x = 4$$

Nullstellen der Funktion sind somit: $x=1$, $x=4$. Also: $N_1(1|0)$, $N_2(4|0)$.

IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung:* Das Nullsetzen der 1. Ableitung führt zu den folgenden Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x -Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ als relatives Maximum}$$

$$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ als relatives Minimum}$$

$x=1$ ist relatives Maximum (Hochpunkt), $x=3$ relatives Minimum (Tiefpunkt) der Funktion. Somit lauten die diesbezüglichen Kurvenpunkte wegen $f(1) = 0$ und $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = -4$: $H(1|0)$, $T(3|-4)$.

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung:* Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x -Koordinate des potenziellen Wendepunkts in die 3. Ab-

leitung führt auf:

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 2 \text{ als Wendepunkt}$$

Der Wendepunkt der Funktion liegt bei $x=2$. Wegen $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 4 = -2$ lautet der Wendepunkt: $W(2|-2)$.

VI. Monotonie: Wegen der Extremwerte $x=1$ und $x=3$ sind die Monotonieintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

$(-\infty, 1)$	$x=1$	$(1, 3)$	$x=3$	$(3, \infty)$
	relatives Maximum		relatives Minimum	
↙		↘ ↙		↘
f monoton steigend		f monoton fallend		f monoton steigend

Also ist f monoton steigend auf $(-\infty, 1)$ und $(3, \infty)$, monoton fallend auf $(1, 3)$.

VII. Krümmung: Auf Grund des Wendepunktes $x=2$ sind die Krümmungsintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

$(-\infty, 2)$	$x=2$	$(2, \infty)$
	Wendepunkt	
↙		↘
f konkav		f konvex
↑		↑
$x=1$ rel. Maximum mit $f''(1)=-6<0$		$x=3$ rel. Minimum mit $f''(3)=6>0$

Somit ist f konkav (rechtsgekrümmt) auf dem Intervall $(-\infty, 2)$, konvex (linksgekrümmt) auf dem Intervall $(2, \infty)$.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x : Der Term x^3 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion $f(x)$ und besitzt den positiven Koeffizienten 1. Es gilt: $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) = x^3 - \dots \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = x^3 - \dots \rightarrow -\infty$.

IX. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-4	9	-12	6	Schnittpunkt $S_y(0 -4)$
1	0	0	-6	6	Nullstelle $N(1 0)$ = Hochpunkt $H(1 0)$
2	-2	-3	0	6	Wendepunkt $W(2 -2)$
3	-4	0	6	6	Tiefpunkt $T(3 -4)$
4	0	9	12	6	Nullstelle $N(4 0)$

