**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

---

**Aufgabe**: Gegeben ist das Polynom, die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4\,.$$

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung durch, d.h.: Definitionsbereich der Funktion, Nullstellenbestimmung, Ableitungen, Bestimmung der Extremstellen, Bestimmung der Wendepunkte, Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten, Verhalten der Funktion im Unendlichen, Wertetabelle, Zeichnung.

**Lösung**: I. Definitionsbereich: $D_f$ = **R**. Das Polynom ist für alle $x \in \mathbf{R}$ definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar.

II. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel): $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ (Funktion),

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ (1. Ableitung), $f''(x) = 6x - 12$ (2. Ableitung), $f'''(x) = 6$ (3. Ableitung)

III. Nullstellen: Geratene Nullstelle bei $x$=1 mit $f(1)$ = 0 und Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3-6x^2+9x-4):(x-1) = x^2-5x+4 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\quad -5x^2+9x \\
\quad \underline{-(-5x^2+5x)} \\
\qquad\quad 4x-4 \\
\qquad\quad \underline{-(4x-4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

ergeben beim Nullsetzen der Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee [x = 1] \vee x = 4$$

Nullstellen der Funktion sind somit: $x$=1, $x$=4. Also: $N_1(1|0)$, $N_2(4|0)$.

IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Das Nullsetzen der 1. Ableitung führt zu den folgenden Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

*Hinreichende Bedingung*: Einsetzen der x-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow x = 1$ als relatives Maximum

$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ als relatives Minimum

$x$=1 ist relatives Maximum (Hochpunkt), $x$=3 relatives Minimum (Tiefpunkt) der Funktion. Somit lauten die diesbezüglichen Kurvenpunkte wegen $f(1)$ = 0 und $f(3)$ = $3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = -4$: H(1|0), T(3|-4).

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

*Hinreichende Bedingung*: Einsetzen der x-Koordinate des potenziellen Wendepunkts in die 3. Ableitung führt auf:

$f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 2$ als Wendepunkt

Der Wendepunkt der Funktion liegt bei *x*=2. Wegen *f(2)* = $2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 4$ = -2 lautet der Wendepunkt: W(2|-2).

VI. <u>Monotonie</u>: Wegen der Extremwerte x=1 und x=3 sind die Monotonieintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

| (-∞, 1) | x=1 | (1, 3) | x=3 | (3, ∞) |
|---|---|---|---|---|
| ↱<br>f monoton steigend | relatives Maximum | ↴ ↱<br>f monoton fallend | relatives Minimum | ↴<br>f monoton steigend |

Also ist *f* monoton steigend auf (-∞, 1) und (3, ∞), monoton fallend auf (1, 3).

VII. <u>Krümmung</u>: Auf Grund des Wendepunktes *x*=2 sind die Krümmungsintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

| (-∞, 2) | x=2 | (2, ∞) |
|---|---|---|
| ↱<br>f konkav<br>↑<br>*x*=1 rel. Maximum mit *f''(1)*=-6<0 | Wende-punkt | ↴<br>f konvex<br>↑<br>*x*=3 rel. Minimum mit *f''(3)*=6>0 |

Somit ist *f* konkav (rechtsgekrümmt) auf dem Intervall (-∞, 2), konvex (linksgekrümmt) auf dem Intervall (2, ∞).

VIII. <u>Verhalten für betragsmäßig große x</u>: Der Term $x^3$ ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)* und besitzt den positiven Koeffizienten 1. Es gilt: $x \to \infty \Rightarrow f(x) = x^3 - ... \to \infty$ bzw. $x \to -\infty \Rightarrow f(x) = x^3 - ... \to -\infty$.

IX. <u>Wertetabelle, Zeichnung</u>:

| x | y = f(x) | f'(x) | f''(x) | f'''(x) | Besondere Kurvenpunkte |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -4 | 9 | -12 | 6 | Schnittpunkt $S_y$(0\|-4) |
| 1 | 0 | 0 | -6 | 6 | Nullstelle N(1\|0) = Hochpunkt H(1\|0) |
| 2 | -2 | -3 | 0 | 6 | Wendepunkt W(2\|-2) |
| 3 | -4 | 0 | 6 | 6 | Tiefpunkt T(3\|-4) |
| 4 | 0 | 9 | 12 | 6 | Nullstelle N(4\|0) |