Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist das Polynom, die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = \frac{x^3}{2}(8-x).$$

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung durch, d.h.: Definitionsbereich der Funktion, Symmetrie, Nullstellenbestimmung, Ableitungen, Bestimmung der Extremstellen, Bestimmung der Wendepunkte, Verhalten der Funktion im Unendlichen, Wertetabelle, Zeichnung.

Lösung: I. Definitionsbereich: $D_f = \mathbf{R}$. Das Polynom ist für alle $x \in \mathbf{R}$ definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar. – Neben der Darstellung der Funktion als Produkt verwenden wir durch Auflösen der Klammer die Darstellung:

$$f(x) = \frac{x^3}{2}(8-x) = \frac{x^3}{2} \cdot 8 - \frac{x^3}{2} \cdot x = 4x^3 - \frac{1}{2}x^4.$$

Wegen den Potenzen x^3 und x^4 ist eine (gerade oder ungerade) Symmetrie nicht erkennbar.

II. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel); die letzte Form von *f* verwenden wir beim Ableiten: $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^4$ (Funktion), $f'(x) = 12x^2 - 2x^3$ (1. Ableitung), $f''(x) = 24x - 6x^2$ (2. Ableitung), $f'''(x) = 24 - 12x$ (3. Ableitung).

III. Nullstellen: Es folgt aus der Darstellung der Funktion als Produkt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{2}(8-x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{2} = 0 \vee 8 - x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \vee 8 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

Nullstellen der Funktion sind somit: x=0, x=8. Also: $N_1(0|0)$, $N_2(8|0)$.

IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(6-x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \vee 6 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen Werte x=0 und x=6 in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(0) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ kann weder als Tief- noch Hochpunkt erkannt werden (siehe dazu V.)

$f''(6) = 144 - 216 = -72 < 0 \Rightarrow x = 0$ als relatives Maximum

Bei x=6 liegt ein relatives Maximum (Hochpunkt). Somit lautet der diesbezügliche Kurvenpunkt wegen $f(6) = \frac{6^3}{2}(8-6) = 6^3 = 216$: H(6|216).

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Aus dem Nullsetzen der 2. Ableitung folgt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(12-3x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 12 - 3x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \vee 12 = 3x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Koordinate der potenziellen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(0) = 24 - 0 = 24 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als Wendepunkt

$f'''(4) = 24 - 48 = -24 \neq 0 \Rightarrow x = 4$ als Wendepunkt

Insbesondere liegt bei x=0 also kein Hoch- und Tiefpunkt (siehe IV.), sondern ein Wendepunkt vor, und zwar ein Sattelpunkt mit Funktionssteigung $f'(0) = 0$. Die Wendepunkte lauten wegen $f(0) = 0$

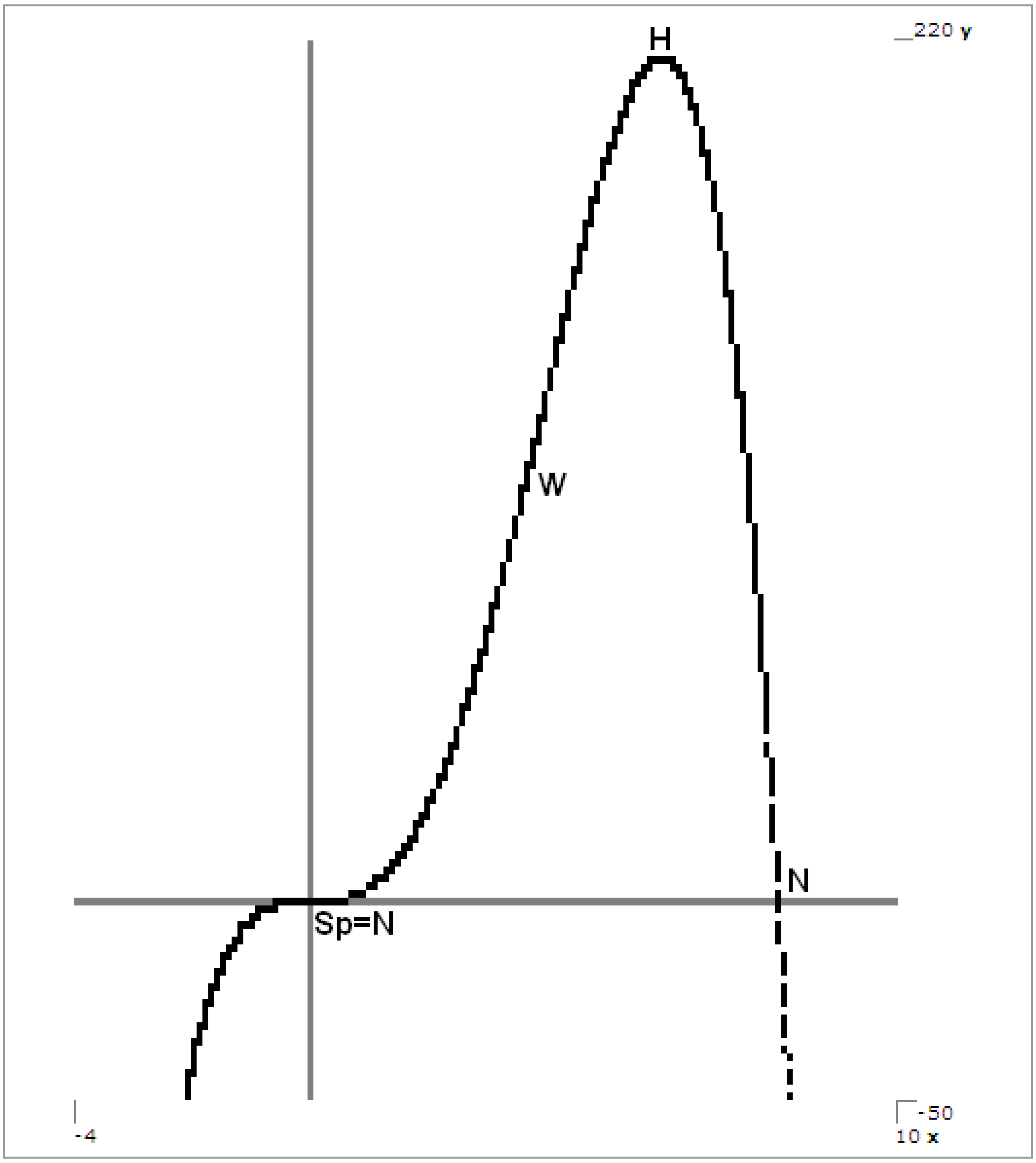
und $f(4) = \frac{4^3}{2}(8-4) = 128$: $W_1(0|0)$, $W_2(4|128)$.

VI. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^4 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^4$ und besitzt den negativen Koeffizienten $-\frac{1}{2}$. Damit gilt:

$x \to \infty \Rightarrow f(x) = ... - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$ bzw. $x \to -\infty \Rightarrow f(x) = ... - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$.

VII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	24	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt $S_y(0\|0)$ = Sattelpunkt $W_S(0\|0)$
4	128	64	0	-24	Wendepunkt W(4|128)
6	216	0	-72	-48	Hochpunkt H(6|216)
8	0	-256	-192	-72	Nullstelle N(8|0)



07.2014 / Aufgabe 2