Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist das Polynom, die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = (x-4)^2(x^2-4).$$

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung durch, d.h.: Definitionsbereich der Funktion, Symmetrie, Nullstellenbestimmung, Ableitungen, Bestimmung der Extremstellen, Bestimmung der Wendepunkte, Verhalten der Funktion im Unendlichen, Wertetabelle, Zeichnung.

Lösung: I. Definitionsbereich: $D_f = \mathbf{R}$. Das Polynom ist für alle $x \in \mathbf{R}$ definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar.

II. Symmetrie: Die Funktion ist ein Produkt. Da der erste Faktor (x–4) sowohl gerade als auch ungerade, der zweite Faktor (x^2–4) nur gerade Exponenten enthält, besteht das ausgerechnete Polynom aus geraden und ungeraden Potenzen. Eine Symmetrie ist mithin nicht erkennbar.

III. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel, weiter gemäß der Produkt- und Kettenregel): Mit $f(x) = (x-4)^2(x^2-4)$ (Funktion) gilt für die 1., 2. und 3. Ableitung:

$f'(x) = 2(x-4)(x^2-4) + (x-4)^2 \cdot 2x = 2(x-4)[(x^2-4) + x(x-4)] =$
$2(x-4)[x^2-4+x^2-4x] = 2(x-4)(2x^2-4x-4)$

$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot (2x^2-4x-4) + 2(x-4)(4x-4) = 4x^2-8x-8+8x^2-8x-32x+32 =$
$12x^2-48x+32$

$f'''(x) = 24x-48.$

IV. Nullstellen: Nullsetzen des Funktionsterms ergibt:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \vee x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow$
$x = 4 \vee x = \pm 2$

Nullstellen der Funktion sind damit: $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$, $N_3(4|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)(2x^2-4x-4) = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \vee 2x^2-4x-4 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 4 \vee x^2-2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 1 \pm \sqrt{1^2+2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(1-\sqrt{3}) = 12 \cdot (1-\sqrt{3})^2 - 48 \cdot (1-\sqrt{3}) + 32 \approx 73{,}57 > 0 \Rightarrow x = 1-\sqrt{3}$ als Tiefpunkt $T_1(1-\sqrt{3}\,|-77{,}57)$

$f''(1+\sqrt{3}) = 12 \cdot (1+\sqrt{3})^2 - 48 \cdot (1+\sqrt{3}) + 32 \approx -9{,}57 < 0 \Rightarrow x = 1+\sqrt{3}$ als Hochpunkt $H(1+\sqrt{3}\,|5{,}57)$

$f''(4) = 12 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 32 = 32 > 0 \Rightarrow x = 4$ als Tiefpunkt $T_2(4|0)$.

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung führt zu:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2-48x+32 = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+\frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - \frac{8}{3}} = 2 \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \approx 0{,}85 \vee x \approx 3{,}15$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der möglichen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(0{,}85) = 24 \cdot 0{,}85 - 48 = -27{,}6 \neq 0 \Rightarrow x = 0{,}85$ als Wendepunkt

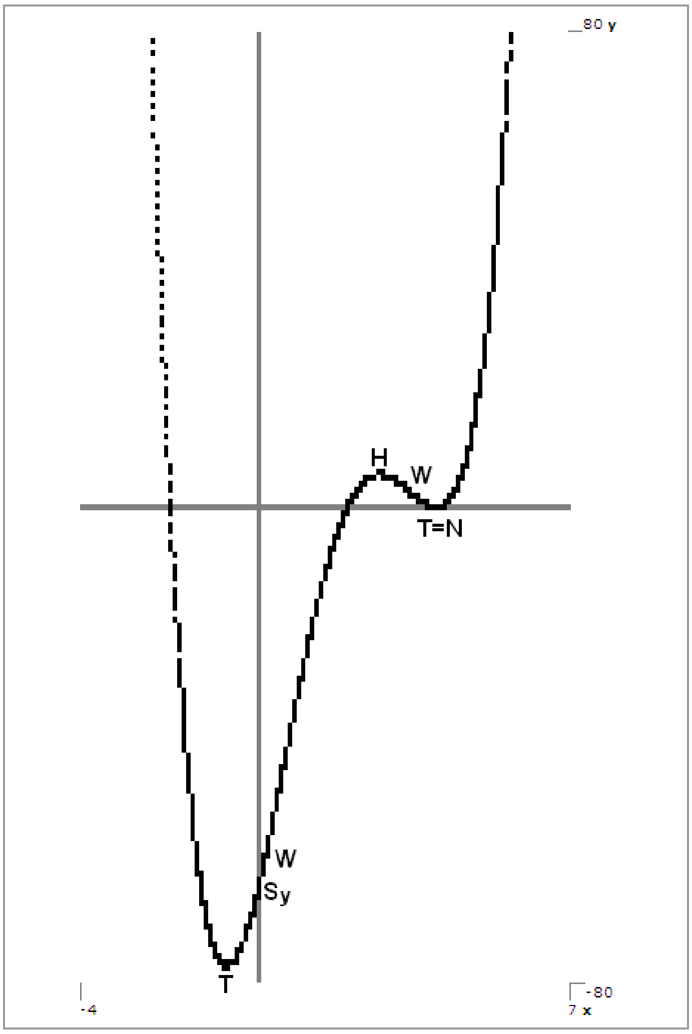
$f'''(3{,}15) = 24 \cdot 3{,}15 - 48 = 27{,}6 \neq 0 \Rightarrow x = 3{,}15$ als Wendepunkt

f(x) besitzt die zwei Wendepunkte: W_1(0,85|-32,52), W_2(3,15|4,28).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Würden wir die Funktion ausmultiplizieren, so wäre das Polynom von der Form $f(x) = x^4 + \ldots$ Der Term x^4 ist die höchste Potenz in *f(x)* mit geradem Exponenten und besitzt den positiven Koeffizienten 1. Damit gilt: $x \to \infty \Rightarrow f(x) = x^4 + \ldots \to \infty$ bzw. $x \to -\infty \Rightarrow f(x) = x^4 + \ldots \to \infty$.

VIII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-144	168	Nullstelle N(-2|0)
-0.74	-77.5671	0	66.09	Tiefpunkt T(-0.74|-77.57)
0	-64	32	24	Schnittpunkt S_y(0|-64)
0.58	-42.8509	38.63	0	Wendepunkt W(0.58|-42.85)
2	0	16	-24	Nullstelle N(2|0)
2.73	5.5692	0	-17.6	Hochpunkt H(2.73|5.57)
3.41	2.6553	-6.63	0	Wendepunkt W(3.41|2.66)
4	0	0	23.52	Nullstelle N(4|0) = Tiefpunkt T(4|0)



07.2014 / Aufgabe 3