Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist das Polynom, die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 8).$$

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung durch, d.h.: Definitionsbereich der Funktion, Symmetrie, Nullstellenbestimmung, Ableitungen, Bestimmung der Extremstellen, Bestimmung der Wendepunkte, Verhalten der Funktion im Unendlichen, Wertetabelle, Zeichnung.

Lösung: I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist für alle $x \in \mathbf{R}$ definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar. – Wir multiplizieren aus:

$$f(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 8) = x^4 - 16x^2 + 8x^2 - 128 = x^4 - 8x^2 - 128.$$

II. Eine Symmetrie zur y-Achse ist wegen der geraden Exponenten in den Summanden der ausmultiplizierten Funktion gegeben.

III. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel): Es gilt: $f(x) = x^4 - 8x^2 - 128$ (Funktion), $f'(x) = 4x^3 - 16x$ (1. Ableitung), $f''(x) = 12x^2 - 16$ (2. Ableitung), $f'''(x) = 24x$ (3. Ableitung).

IV. Nullstellenbestimmung unter Verwendung der Produktdarstellung der Funktion:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 16)(x^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \vee x^2 + 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \vee [x^2 = -8] \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Nullstellen sind also: $N_1(-4|0)$, $N_2(4|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow$$

$4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$ als kritische Stellen.

Hinreichende Bedingung: $f''(-2) = 48 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow x = -2$ als Tiefpunkt $T_1(-2|-144)$;

$f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow x = 0$ als Hochpunkt H(0|-128)

$f''(2) = 48 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow x = 2$ als Tiefpunkt $T_2(2|-144)$.

Dabei gilt auf Grund der Symmetrie: $f(-2) = f(2) = (-12)\cdot 12 = -144$.

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$x^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ als kritische Stellen.

Hinreichende Bedingung:

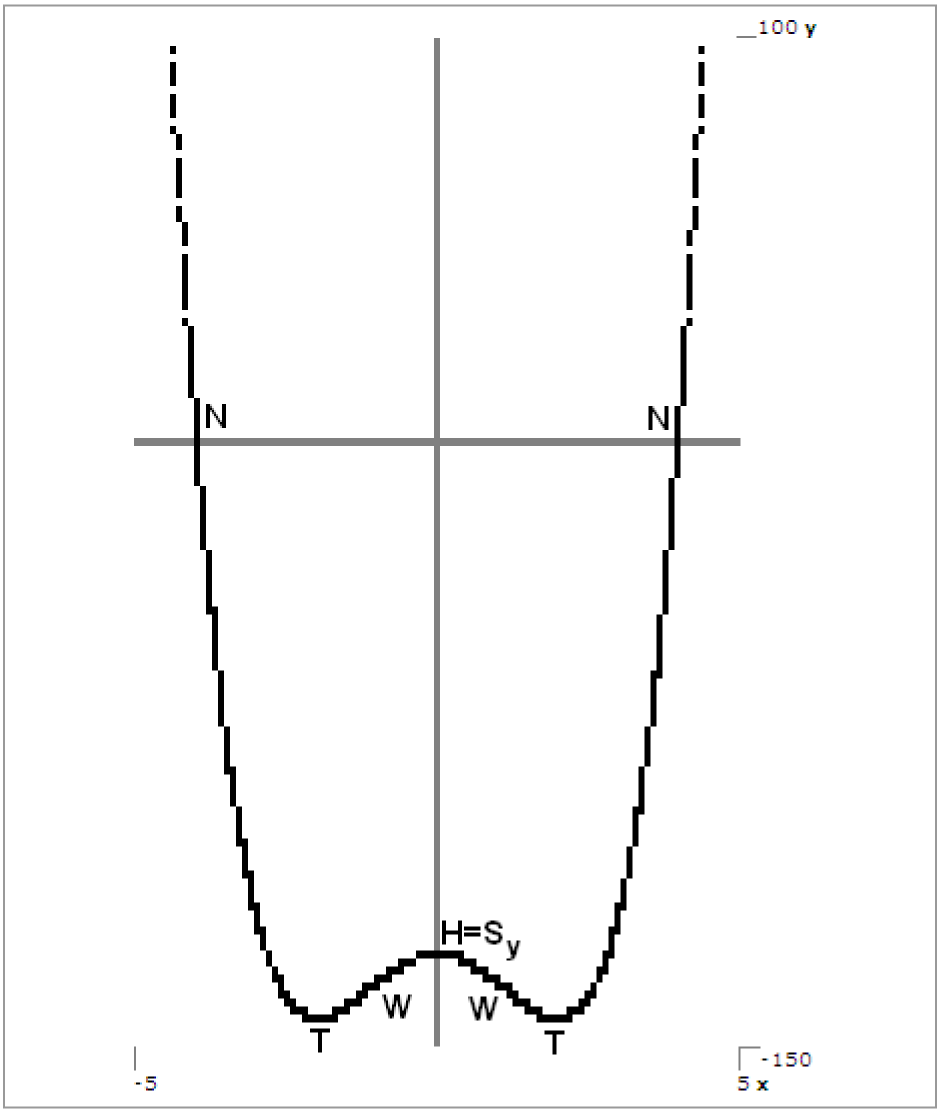
$f'''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = -24 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ als Wendepunkt $W_1(-\frac{2}{\sqrt{3}}|-137)$

$f'''(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 24 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ als Wendepunkt $W_2(\frac{2}{\sqrt{3}}|-137)$.

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Mit x^4 als höchster Potenz im Polynom ergibt sich:
$x \to \infty \Rightarrow x^4 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und weiter: $x \to -\infty \Rightarrow x^4 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$.

VIII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4	0	-192	176	-96	Nullstelle N(-4|0)
-2	-144	0	32	-48	Tiefpunkt T(-2|-144)
-1.15	-136.831	12.3165	-0.13	-27.6	Wendepunkt W(-1.15|-136.83)
0	-128	0	-16	0	Schnittpunkt S_y(0|-128) = Hochpunkt H(0|-128)
1.16	-136.9542	-12.3164	0.1472	27.84	Wendepunkt W(1.16|-136.95)
2	-144	0	32	48	Tiefpunkt T(2|-144)
4	0	192	176	96	Nullstelle N(4|0)



07.2014 / Aufgabe 4