

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

**Aufgabe:** Untersuche die Funktion  $f(x) = (4x - 12) \cdot e^{-2x}$  auf Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte und Asymptoten.

**Lösung:** I. Definitionsbereich:  $D_f = \mathbf{R}$ . Die Funktion ist für alle  $x \in \mathbf{R}$  definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar.

II. Ableitungen (gemäß Produktregel):

$$f'(x) = 4 \cdot e^{-2x} + (4x - 12) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (4 - 8x + 24) \cdot e^{-2x} = (28 - 8x) \cdot e^{-2x} \quad (1. \text{ Ableitung}),$$

$$f''(x) = (-8) \cdot e^{-2x} + (28 - 8x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (-8 - 56 + 16x) \cdot e^{-2x} = (16x - 64) \cdot e^{-2x} \quad (2. \text{ Ableitung}),$$

$$f'''(x) = 16 \cdot e^{-2x} + (16x - 64) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (16 - 32x + 128) \cdot e^{-2x} = (144 - 32x) \cdot e^{-2x} \quad (3. \text{ Ableitung}).$$

III. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung:*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12) \cdot e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

$f(x)$  besitzt eine Nullstelle  $N(3|0)$ .

IV. Hoch-, Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung:*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (28 - 8x) \cdot e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 28 - 8x = 0 \Leftrightarrow 28 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

Wegen  $f''(\frac{7}{2}) = -8 \cdot e^{-7} < 0$  (*hinreichende Bedingung*) liegt ein Hochpunkt  $H(\frac{7}{2} | 2e^{-7})$  vor.

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung:*

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (16x - 64) \cdot e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 16x - 64 = 0 \Leftrightarrow 16x = 64 \Leftrightarrow x = 4$$

Wegen  $f'''(4) = 16 \cdot e^{-8} \neq 0$  (*hinreichende Bedingung*) besitzt die Funktion  $f$  in  $W(4 | 4 \cdot e^{-8})$  einen Wendepunkt.

VI. Verhalten für betragsmäßig große  $x$ :  $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 = y$  als Asymptote.

VII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-12	28	-64	Schnittpunkt $S_y(0 -12)$
3	0	0.01	-0.04	Nullstelle $N(3 0)$
3.5	0.0018	0	-0.01	Hochpunkt $H(3.5 0)$
4	0.0013	0	0	Wendepunkt $W(4 0)$

