

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$ auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Pole, Asymptoten.

Lösung: I. Definitionsbereich: Auszuschließen sind die x , bei denen der Nenner 0 wird, also:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Also: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

II. Ableitungen: Gemäß der Quotientenregel ergibt sich:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} \quad (\text{Funktion})$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 2}{(x^2-1)^2} \quad (1. \text{ Ableitung})$$

$$f''(x) = \frac{(-4x+2)(x^2-1)^2 - (-2x^2+2x-2) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$
$$\frac{(-4x+2)(x^2-1) - (-2x^2+2x-2) \cdot 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3 - 6x^2 + 12x - 2}{(x^2-1)^3} \quad (2. \text{ Ableitung})$$

III. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung:*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir die Nullstelle: $N(0,5|0)$.

IV. Hoch-, Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung:*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 2x - 2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - 1} = 0,5 \pm \sqrt{-0,75}$$

Es gibt mithin keine Extremstellen von $f(x)$.

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung:*

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 6x^2 + 12x - 2}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 12x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0,181$$

Bei $W(0,181|0,66)$ liegt dann der einzige Wendepunkt von $f(x)$ vor.

VI. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Polstellen liegen an den Lücken des Definitionsbereichs $x = -1$ bzw. $x = +1$ vor. Dabei gilt:

$$\underline{x=-1}: x < -1, x \rightarrow -1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0, 2x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty;$$

$$x > -1, x \rightarrow -1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0, 2x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty.$$

D.h.: Bei $x = -1$ liegt eine Polstelle mit wechselndem Vorzeichen vor.

Entsprechend gilt:

$x=1$: $x < 1, x > 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0, 2x - 1 > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$;
 $x > 1, x > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0, 2x - 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$.

D.h.: Bei $x = 1$ liegt eine Polstelle mit wechselndem Vorzeichen vor.

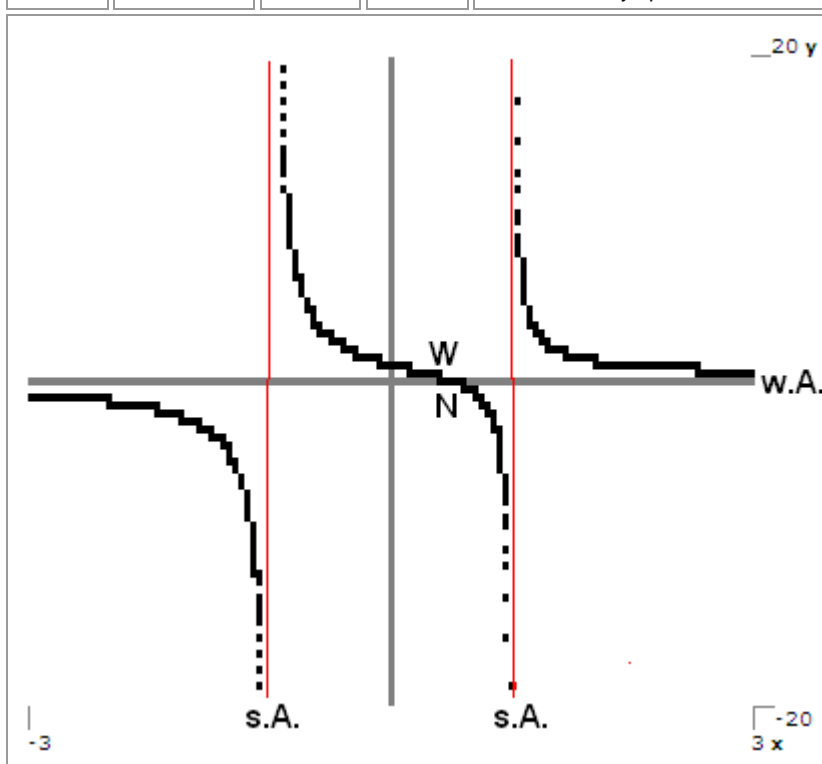
VII. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten $f(x)$ für betragsmäßig große x , also:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} \rightarrow 0 = y$$

mit $y = 0$ als waagerechter Asymptote.

VII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -1$
0	1	-2	2	Schnittpunkt $S_y(0 1)$
0.18	0.6614	-1.82	0	Wendepunkt $W(0.18 0.66)$
0.5	0	-2.67	-7.11	Nullstelle $N(0.5 0)$
1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 1$



www.michael-buhlmann.de / 07.2014 / Aufgabe 20