Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$ auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Pole, Asymptoten.

Lösung: I. Definitionsbereich: Auszuschließen sind die x, bei denen der Nenner 0 wird, also:
$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Also: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

II. Ableitungen: Gemäß der Quotientenregel ergibt sich:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} \text{ (Funktion)}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2+2x-2}{(x^2-1)^2} \text{ (1. Ableitung)}$$

$$f''(x) = \frac{(-4x+2)(x^2-1)^2-(-2x^2+2x-2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$\frac{(-4x+2)(x^2-1)-(-2x^2+2x-2)\cdot 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3-6x^2+12x-2}{(x^2-1)^3} \text{ (2. Ableitung)}$$

III. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung*:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Damit haben wir die Nullstelle: N(0,5|0).

IV. Hoch-, Tiefpunkte*: Notwendige Bedingung*:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+2x-2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2+2x-2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25-1} = 0{,}5 \pm \sqrt{-0{,}75}$$

Es gibt mithin keine Extremstellen von f(x).

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3-6x^2+12x-2}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x^3-6x^2+12x-2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}181$$

Bei W(0,181|0,66) liegt dann der einzige Wendepunkt von f(x) vor.

VI. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Polstellen liegen an den Lücken des Definitionsbereichs x = -1 bzw. x = +1 vor. Dabei gilt:

x=-1: x<-1, x->-1 => x^2-1>0, 2x-1<0 => f(x) < 0 => f(x) -> -∞;
x>-1, x->-1 => x^2-1<0, 2x-1<0 => f(x) > 0 => f(x) -> +∞.
D.h.: Bei x = -1 liegt eine Polstelle mit wechselndem Vorzeichen vor.
Entsprechend gilt:

x=1: $x<1$, $x \to 1 \Rightarrow x^2-1<0$, $2x-1>0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$;
$x>1$, $x \to 1 \Rightarrow x^2-1>0$, $2x-1>0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(x) \to +\infty$.

D.h.: Bei x = 1 liegt eine Polstelle mit wechselndem Vorzeichen vor.

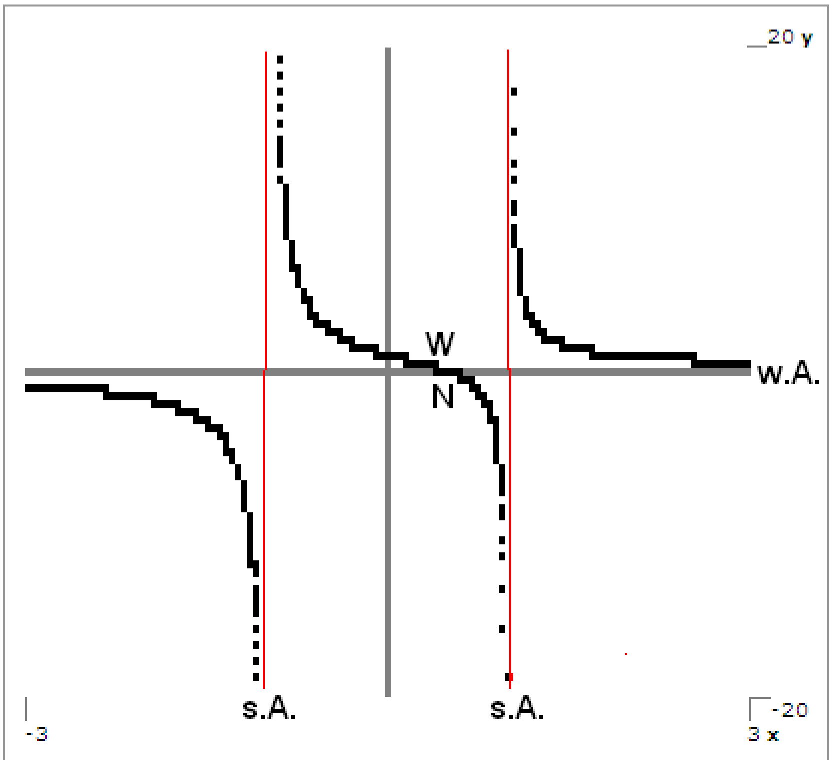
VII. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten f(x) für große x, also:

$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-1} \to 0 = y$

mit y = 0 als waagerechter Asymptote.

VII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	±∞	±∞	±∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
0	1	-2	2	Schnittpunkt $S_y(0\|1)$
0.18	0.6614	-1.82	0	Wendepunkt W(0.18|0.66)
0.5	0	-2.67	-7.11	Nullstelle N(0.5|0)
1	±∞	±∞	±∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1



07.2014 / Aufgabe 20