Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$$

mit f(-1) = 0. Bestimme die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion und skizziere diese.

Lösung: I. Für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades gelten allgemein folgende

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$ $f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + ... + 6a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

II. Wir berechnen für die auf alle reellen Zahlen definierte Funktion f(x) die <u>Ableitungen</u> (nach Potenz- und Summenregel) als:

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$ (Funktion)

$f'(x) = 3x^2 - 14x + 8$ (1. Ableitung)

$f''(x) = 6x - 14$ (2. Ableitung)

$f'''(x) = 6$ (3. Ableitung).

III. <u>Nullstellen</u>: Eine in der Aufgabenstellung vorgegebene Nullstelle liegt bei *x*=-1 mit *f(-1)* = 0 vor. Wir führen daher die folgende Polynomdivision mit dem Teiler (x-(-1)) = (x+1) durch:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-7x^2+8x+16):(x+1) = x^2-8x+16 \\
\underline{-(x^3+x^2)} \\
\quad -8x^2+8x \\
\quad \underline{-(-8x^2-8x)} \\
\qquad 16x+16 \\
\qquad \underline{-(16x+16)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

und haben beim Nullsetzen der Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \vee (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$$

Nullstellen der Funktion sind somit: *x*=-1, *x*=4. Also: $N_1(-1|0)$, $N_2(4|0)$.

IV. <u>Hoch- und Tiefpunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: Das Nullsetzen der 1. Ableitung führt zu den folgenden Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - \frac{24}{9}} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{12}{3} = 4$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen x-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(\frac{2}{3}) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 14 = 4 - 14 = -10 < 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ als relatives Maximum

$f''(4) = 6 \cdot 4 - 14 = 14 - 14 = 10 > 0 \Rightarrow x = 4$ als relatives Minimum.

x=2/3 ist relatives Maximum (Hochpunkt), *x*=4 relatives Minimum (Tiefpunkt) der Funktion. Somit lauten die diesbezüglichen Kurvenpunkte wegen *f(*2/3*)* = $\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{2}{3} + 16 = \frac{500}{27} \approx 18{,}52$ und *f(4)* = 0 (Nullstelle $N_2(4|0)$): H(2/3|18,52), T(4|0).

V. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 14 = 0 \Leftrightarrow 6x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

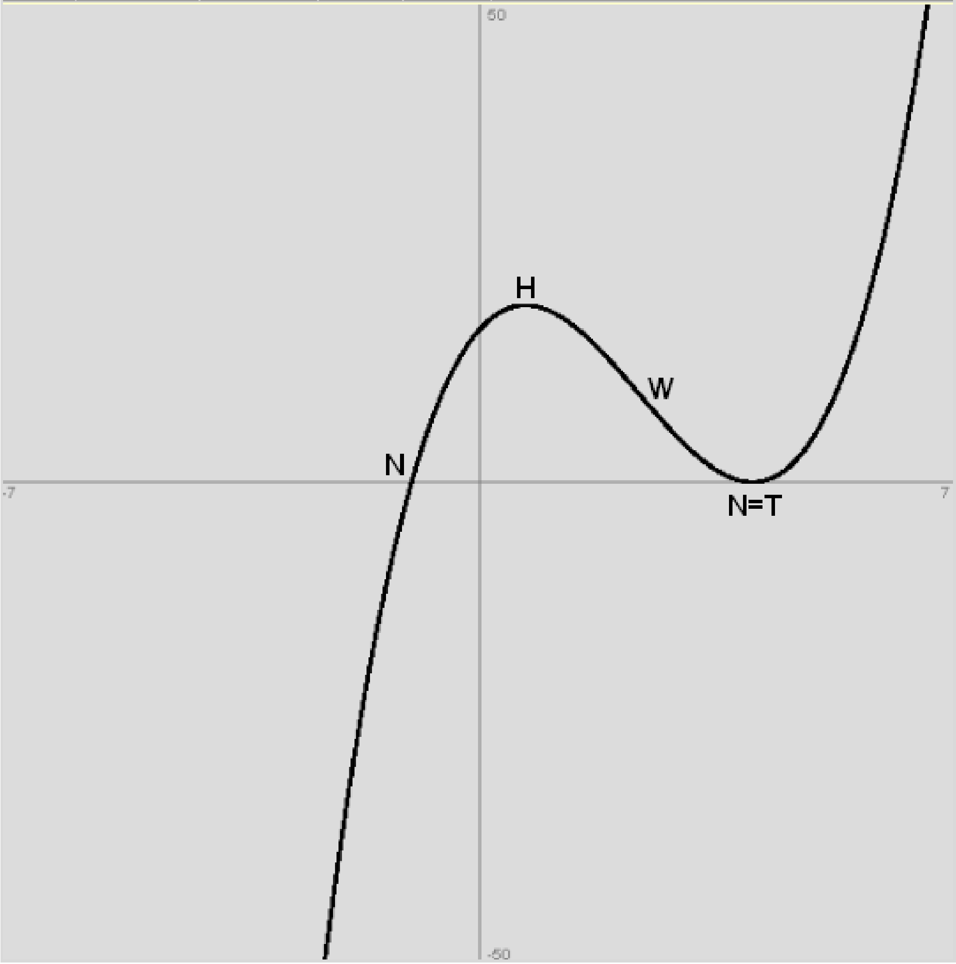
Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Koordinate des potenziellen Wendepunkts in die 3. Ableitung führt auf:

$f'''(\frac{7}{3}) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$ als Wendepunkt.

Wegen *f(*7/3*)* = $\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 7 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{7}{3} + 16 = \frac{250}{27} \approx 9{,}26$ lautet der Wendepunkt: W(7/3|9,26).

VI. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1	0	25	-20	6	Nullstelle N(-1|0)
0	16	8	-14	6	Schnittpunkt S_y(0|16)
0.67	18.5185	-0.0333	-9.98	6	Hochpunkt H(0.67|18.52)
2.34	9.2037	-8.3332	0.04	6	Wendepunkt W(2.34|9.2)
4	0	0	10	6	Nullstelle N(4|0) = Tiefpunkt T(4|0)



www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 316