**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

---

**Aufgabe**: Gegeben ist die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3.$$

Bestimme die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion und skizziere diese.

**Lösung**: I. Für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades gelten allgemein folgende

| **Zentrale Punkte der Kurvendiskussion** |
|---|
| Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ |
| I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor):<br>$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$<br>$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2$<br>$f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + ... + 6a_3$ |
| II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen):<br>f(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, … -> N($x_1$\|0), N($x_2$\|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel) |
| III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen):<br>a) f'(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, …<br>b) f''($x_1$) < 0 -> H($x_1$\|f($x_1$)) oder f''($x_1$) > 0 -> T($x_1$\|f($x_1$)); f''($x_2$) < 0 -> H($x_2$\|f($x_2$)) oder f''($x_2$) > 0 -> T($x_2$\|f($x_2$)); … |
| IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen):<br>a) f''(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, …<br>b) f'''($x_1$) ≠ 0 -> W($x_1$\|f($x_1$)); f'''($x_2$) ≠ 0 -> W($x_2$\|f($x_2$)); … |
| IVa. Sattelpunkte $x_0$ liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt:<br>f'($x_0$) = 0, f''($x_0$) = 0, f'''($x_0$) ≠ 0 -> S($x_0$\|f($x_0$)) |

**Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen**

II. Wir berechnen für die auf alle reellen Zahlen definierte Funktion f(x) die Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel) als:

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3$ (Funktion)

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{4}{3} \cdot 3x^2 = x^3 - 4x^2$ (1. Ableitung)

$f''(x) = 3x^2 - 4 \cdot 2x = 3x^2 - 8x$ (2. Ableitung)

$f'''(x) = 3 \cdot 2x - 8 = 6x - 8$ (3. Ableitung).

III. Nullstellen: Nullsetzen der Funktionsgleichung ergibt u.a. durch Ausklammern von $x^3$ und nach dem Satz vom Nullprodukt:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(\frac{1}{4}x - \frac{4}{3}) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \vee \frac{1}{4}x - \frac{4}{3} = 0$

$x = 0 \vee \frac{1}{4}x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{16}{3}$

Nullstellen der Funktion sind somit: $x$=0, $x$=16/3. Also: $N_1(0|0)$, $N_2(16/3|0)$.

IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Das Nullsetzen der 1. Ableitung führt zu den folgenden Gleichungsumformungen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

u.a. durch Ausklammern mit $x^2$, Satz vom Nullprodukt und Ziehen der Quadratwurzel.

*Hinreichende Bedingung*: Einsetzen der gefundenen x-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 = 0$, wodurch eine Identifizierung als Extrempunkt nicht möglich ist

$f''(4) = 4 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 = 64 - 32 = 32 > 0 \Rightarrow x = 4$ als relatives Minimum.

$x$=4 relatives Minimum (Tiefpunkt) der Funktion. Der diesbezügliche Kurvenpunkt lautet wegen *f(4)* $= \frac{1}{4} \cdot 4^4 - \frac{4}{3} \cdot 4^3 = 4^3 - \frac{4}{3} \cdot 4^3 = -\frac{1}{3} \cdot 4^3 = -\frac{64}{3} \approx -21{,}33$: T(4|-21,33).

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(3x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x = 8 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$,

wieder durch Ausklammern und mit dem Satz vom Nullprodukt.

*Hinreichende Bedingung*: Einsetzen der x-Koordinaten der potenziellen Wendepunkte in die 3. Ableitung führt auf:

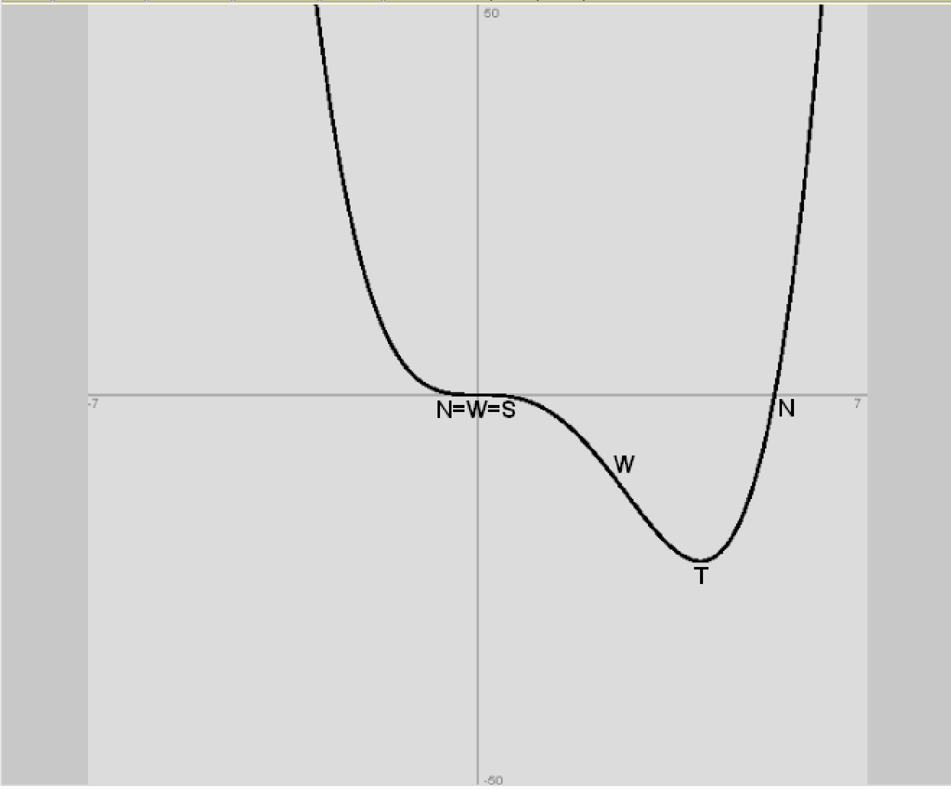
$f'''(0) = 6 \cdot 0 - 8 = -8 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als Wendepunkt.

$f'''(\frac{8}{3}) = 6 \cdot \frac{8}{3} - 8 = 16 - 8 = 8 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ als Wendepunkt.

Wegen *f'(0)* = 0 (siehe III.) liegt an der Stelle x = 0 ein besonderer Wendepunkt, ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, ein Sattelpunkt vor. Es gilt auf Grund *f(0)* = 0: $W_1(0|0)$ = S(0|0). Wegen *f(8/3)* = $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^4 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 = -\frac{1024}{81} \approx -12{,}64$ lautet der Wendepunkt: $W_2(8/3|-12,64)$.

VI. Wertetabelle, Zeichnung:

| Wertetabelle: | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **x** | **f(x)** | **f'(x)** | **f''(x)** | **f'''(x)** | **Besondere Kurvenpunkte** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -8 | Nullstelle N(0\|0) = Schnittpunkt $S_y$(0\|0) = Sattelpunkt $W_S$(0\|0) |
| 2.67 | -12.6736 | -9.4814 | 0.0267 | 8.02 | Wendepunkt W(2.67\|-12.67) |
| 4 | -21.3333 | 0 | 16 | 16 | Tiefpunkt T(4\|-21.33) |
| 5.34 | 0.2538 | 38.2109 | 42.8268 | 24.04 | Nullstelle N(5.34\|0.25) |




www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 317