

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

**Aufgabe:** Skizziere die gebrochen rationale Funktion  $f(x) = \frac{4 + 2x}{(x - 4)(x + 5)^2}$  durch Untersuchung der Funktionskurve auf Nullstellen, auf senkrechte Asymptoten und die waagerechte Asymptote.

**Lösung:** I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion  $f(x)$  die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion	
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x - x_{N1})^{k_1} (x - x_{N2})^{k_2} \dots \cdot R_1(x)}{b_m (x - x_{P1})^{k_l} (x - x_{P2})^{k_l} \dots \cdot R_2(x)}$	
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen:	
a) Nenner = 0 $\rightarrow b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0 \rightarrow x_{P1}, x_{P2}, \dots \rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{x_{P1}, x_{P2}, \dots\}$ (Definitionsbereich)	
b) Zähler = 0 $\rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \rightarrow x_{N1}, x_{N2}, \dots$	
c) Auswertung:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Stimmt eine Nennernullstelle <math>x_P</math> mit einer Zählernullstelle <math>x_N</math> überein, so kann der Funktionsterm <math>f(x)</math> um den Faktor <math>(x - x_P)^l = (x - x_N)^k</math> (<math>l=k</math>) zu <math>f^*(x)</math> gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer <math>k</math>, so liegt bei <math>x_P</math> eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich <math>k</math>, so liegt bei <math>x_P</math> eine Lücke mit Lückenwert <math>f^*(x_P)</math> vor.</li> <li>- Ansonsten liegen bei <math>x_{P1}, x_{P2}, \dots</math> senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor <math>(x - x_P)^l</math> vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem <math>l</math> (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote <math>x_P</math> mit <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) oder mit <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem <math>l</math> (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote <math>x_P</math> mit <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) oder mit <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>) und <math>f(x) \rightarrow \infty</math> (<math>x &gt; x_P, x &lt; x_P</math>)).</li> <li>- Ansonsten liegen weiter bei <math>x_{N1}, x_{N2}, \dots</math> Nullstellen mit Linearfaktor <math>(x - x_P)^k</math> vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem <math>k</math>, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem <math>k</math> (Hoch-, Tiefpunkt).</li> </ul>	
II. Waagerechte Asymptote: Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt:	
$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$	$\left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow 0 & \text{falls } n < m \\ \rightarrow \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \rightarrow \pm\infty & \text{falls } n > m \end{array} \right.$
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm $f(x)$ zu $f^*(x)$ kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz $x^n$ und Anwendung der Potenzregel)	
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen):	
a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$ ; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$ ; ...	
V. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen):	
a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$ ; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$ ; ...	
Va. Sattelpunkte $x_0$ liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt:	
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$	

### Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Für das Skizzieren einer gebrochen rationalen Funktion genügt es meist, sich auf die Nullstellen, die senkrechten Asymptoten und die waagerechte Asymptote zu beschränken.

II. Nullstellen: Wir setzen den Zähler des Bruchterms der Funktion  $f(x)$  gleich 0 und erhalten unter Anwendung des Satzes vom Nullprodukt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2.$$

Damit haben wir die Nullstelle:  $N(-2|0)$ .

III. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Wir setzen den Nenner des Bruchterms der Funktion  $f(x)$  gleich 0 und haben:

$$(x-4)(x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0, (x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x+5 = 0 \Leftrightarrow x = -5, x = -5.$$

Wegen des einmaligen Auftretens des Linearfaktors  $(x-4)$  im Nenner des Funktionsterms, liegt an der Stelle  $x=4$  eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel vor. Der Linearfaktor  $(x+5)$  tritt doppelt im Nenner des Funktionsterms auf, so es sich an der Stelle  $x=-5$  um eine senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel handelt. Hinsichtlich des Definitionsbereichs der Funktion sind auszuschließen die  $x$ , bei denen der Nenner 0 wird, also:  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 4\}$ .

IV. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten  $f(x)$  für betragsmäßig große  $x$ , also:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) = \frac{4 + 2x}{(x-4)(x+5)^2} = \frac{4 + 2x}{x^3 + \dots} \rightarrow 0 = y$$

mit  $y = 0$  als waagerechter Asymptote; die höchste Potenz im Zähler ( $x$ ) ist nämlich kleiner als die höchste Potenz im Nenner des Funktionsterms ( $x^3$ ).

V. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -5$
-2	0	-0.04	0.04	Nullstelle $N(-2 0)$
-0.085	-0.0388	-0.01	0	Wendepunkt $W(-0.08 -0.04)$
0	-0.04	-0.01	0	Schnittpunkt $S_y(0 -0.04)$
4	$\pm\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 4$

