Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Führe für die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{10}{x} - \frac{4}{x^2}$ eine Kurvendiskussion durch, wobei die Funktion auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, senkrechte Asymptoten und die waagerechte Asymptote zu untersuchen ist.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x - x_{N1})^{k_1} (x - x_{N2})^{k_2} \cdot ... \cdot R_1(x)}{b_m (x - x_{P1})^{kl} (x - x_{P2})^{k_l} \cdot ... \cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert f*(x_P) vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n < m \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n > m \end{cases}$
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f'(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f'(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f'(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f'(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
V. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

II. Umformen der Funktionsvorschrift: Jede gebrochen rationale Funktion f(x) kann als ein Bruch dargestellt werden. Somit gilt durch Erweitern und Bildung des gemeinsamen Nenners:

$$f(x) = \frac{10}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{10x}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \frac{10x-4}{x^2}.$$

Wir werden im Folgenden die beiden Darstellungen des Funktionsterms $f(x) = \frac{10}{x} - \frac{4}{x^2}$ bzw. $f(x) = \frac{10x-4}{x^2}$ benutzen.

III. <u>Nullstellen</u>: Wir setzen den Zähler der Funktion $f(x) = \frac{10x-4}{x^2}$ gleich 0 und erhalten sofort:

f(x) = 0 ⇔ $\frac{10x-4}{x^2} = 0$ ⇔ 10x–4 = 0 ⇔ 10x = 4 ⇔ x = 0,4.

Damit haben wir die (einfache) Nullstelle: N(0,4|0).

IV. <u>Senkrechte Asymptoten/Polstellen</u>: Wir setzen den Nenner der Funktion $f(x) = \frac{10x-4}{x^2}$ gleich 0 und haben:

$x^2 = 0$ ⇔ x = 0.

Wegen der Vielfachheit 2 des Linearfaktors x im Nenner des Funktionsterms liegt an der Stelle x=0 eine senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel vor. Hinsichtlich des <u>Definitionsbereichs</u> der Funktion f(x) gilt dann noch: D_f = **R**\{0}.

V. <u>Waagerechte Asymptote</u>: Wir betrachten f(x) für betragsmäßig große x, also:

x->±∞ => $f(x) = \frac{10x-4}{x^2} \to 0$ = y

mit y = 0 als waagerechter Asymptote; der Zählergrad (höchste Potenz im Zähler: x) ist nämlich kleiner als der Nennergrad des Funktionsterms (höchste Potenz im Nenner: x^2).

VI. Für die <u>Ableitungen</u> benutzen wir den Funktionsterm $f(x) = \frac{10}{x} - \frac{4}{x^2}$ und erhalten:

Funktion: $f(x) = \frac{10}{x} - \frac{4}{x^2} = 10x^{-1} - 4x^{-2}$

1. Ableitung: $f'(x) = -10x^{-2} + 8x^{-3} = -\frac{10}{x^2} + \frac{8}{x^3}$

2. Ableitung: $f''(x) = 20x^{-3} - 24x^{-4} = \frac{20}{x^3} - \frac{24}{x^4}$

3. Ableitung: $f'''(x) = -60x^{-4} + 96x^{-5} = -\frac{60}{x^4} + \frac{96}{x^5}$.

VII. <u>Hoch-, Tiefpunkte</u>: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{10}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -10x + 8 = 0 \Leftrightarrow 8 = 10x \Leftrightarrow 0{,}8 = x.$$

An der Stelle x=0,8 beträgt der Wert der 2. Ableitung:

$$f''(0{,}8) = \frac{20}{0{,}8^3} - \frac{24}{0{,}8^4} = -19{,}3125 < 0,$$

so dass an der Stelle x=0,8 ein Hochpunkt vorliegt. Wegen

$$f(0{,}8) = \frac{10}{0{,}8} - \frac{4}{0{,}8^2} = 6{,}25$$

folgt für den Hochpunkt: H(0,8|6,25).

VIII. <u>Wendepunkte</u>: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{x^3} - \frac{24}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 20x - 24 = 0 \Leftrightarrow 20x = 24 \Leftrightarrow x = 1{,}2.$$

Wegen

$$f'''(1{,}2) = -\frac{60}{1{,}2^4} + \frac{96}{1{,}2^5} = 9{,}645 \neq 0$$

liegt an der Stelle x=1,2 ein Wendepunkt der Funktion vor. Mit

$$f(1{,}2) = \frac{10}{1{,}2} - \frac{4}{1{,}2^2} = 5\frac{5}{9}$$

folgt für den Wendepunkt: W(1,2| $5\frac{5}{9}$).

VIII. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-∞	±∞	+∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.4	0	62.62	-625.78	Nullstelle N(0.4|0)
0.8	6.25	0	-19.54	Hochpunkt H(0.8|6.25)
1.2	5.5556	-2.31	0	Wendepunkt W(1.2|5.56)