Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die Sinusfunktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ für xε[-8;8] auf: Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte und Periodizität.

1. Lösung: a) I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion f: D_f -> **R** mit y = f(x) zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x-Werte, für die der Funktionsterm f(x) gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y-Werte, die von der Funktion f(x) angenommen werden
- f(x) = 0 => Nullstellen der Funktion
- f‘(x) = 0 => Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- f‘‘(x) = 0 => Wendepunkte der Funktion
- f(-x) = f(x) bzw. f(-x) = -f(x) => Symmetrie der Funktion zur y-Achse bzw. zum Ursprung des Koordinatensystems
- f(x+p) = f(x) => Periodizität der Funktion mit Periode p.

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

Für die Sinusfunktion $y = \sin(x)$ ergeben sich dann die folgenden Eigenschaften:

- Definitionsbereich D_y = **R**
- Wertebereich W_y = [-1; 1]
- Nullstellen als Wendepunkte: N(iπ|0), iε**Z**
- Hochpunkte: H((4i+1)π/2|1), iε**Z**
- Tiefpunkte: T((4i+3)π/2|-1), iε**Z**
- Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
- Periode p = 2π,

nicht zuletzt auf Grund der Eigenschaften allgemeiner Sinusfunktionen vom Typ f(x) = asin(kx) + b mit Amplitude a, Periode p = 2π/k und Mittellinie b.

II. Wir nutzen die Eigenschaften der Sinusfunktion y = sin(x), um zunächst bzgl. der vorgegebenen Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ festzustellen: f(x) entsteht nämlich aus y = sin(x) durch Streckung entlang der x-Achse um den Faktor π/4 (<1; y = sin(πx/4)), durch Streckung entlang der y-Achse um den Faktor 3 (y = 3sin(πx/4)) und durch Verschiebung entlang der y-Achse um den Wert 3/2 nach oben (f(x) = 3sin(πx/4)+3/2). Entsprechend gilt für den Wertebereich auf der Grundlage des Wertebereichs der Sinusfunktion y = sin(x), W_y = [-1;1]: W_f = [3·(-1)+1,5; 3·1+1,5] = [-1,5; 4,5].

III. Die Periode p der Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ ergibt sich vermöge der Formel p = 2π/k bei f(x) = asin(kx) + b als:

$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8\,.$$

IV. Die Nullstellen der Funktion f(x) ergeben sich mit Hilfe der Substitution z = πx/4 aus den folgenden Gleichungsumformungen:

f(x) = 0 ⇔ $3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ = 0 ⇔ 3sin(z)+1,5 = 0 ⇔ 3sin(z) = -1,5 ⇔ sin(z) = -0,5 ⇔
z = -π/6 + 2iπ, z = -5π/6 + 2iπ ⇔ πx/4 = -π/6 + 2iπ, πx/4 = -5π/6 + 2iπ ⇔
x = -2/3 + 8i, x = -10/3 + 8i

mit ganzzahligen i. Wir wählen nun die i aus, so dass die x-Werte im Intervall [-8; 8] liegen und haben damit: x = -10/3, x = -2/3 (i=0), x = 14/3, x = 22/3 (i=1). Die Nullstellen lauten daher: N_1(-10/3|0), N_2(-2/3|0), N_3(14/3|0), N_4(22/3).

IV. Wir das Nachstehende bilden wir die Ableitungen der Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ und erhalten u.a. mit Ketten- und Summenregel die Ableitungsterme:

$f'(x) = \frac{3\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}x)$ (Kettenregel: äußere Ableitung sin -> cos, innere Ableitung πx/4 -> π/4)

$f''(x) = -\frac{3\pi^2}{16}\sin(\frac{\pi}{4}x)$ (Kettenregel: äußere Ableitung cos -> -sin, innere Ableitung πx/4 -> π/4)

$f'''(x) = -\frac{3\pi^3}{64}\cos(\frac{\pi}{4}x)$ (Kettenregel: äußere Ableitung sin -> cos, innere Ableitung πx/4 -> π/4).

V. Für die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ errechnen wir unter Zuhilfenahme der Substitution z = πx/4:

f'(x) = 0 ⇔ $\frac{3\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}x)$ = 0 ⇔ $\cos(\frac{\pi}{4}x)$ = 0 ⇔ x = 0, cos(z) = 0 ⇔ x = 0, z = (2i+1)π/2 ⇔
πx/4 = (2i+1)π/2 ⇔ x = 2(2i+1)

mit ganzzahligen i. Die x-Werte im Intervall [-8; 8] lauten hier: x = -6 (i=-2), x = -2 (i=-1), x = 2 (i=0), x = 6 (i=1). An den Stellen x = -6 und x = 2 liegen Hochpunkte, bei x = -2 und x = 6 Tiefpunkte von f(x) vor wegen: f''(-6) <0, f''(-2) > 0, f''(2) < 0, f''(6) > 0. Wir haben damit als Extrema: H_1(-6|4,5), T_1(-2|-1,5), H_2(2|4,5), T_2(6|-1,5) auf Grund von: f(-6) = f(2) = 4,5, f(-2) = f(6) = -1,5.

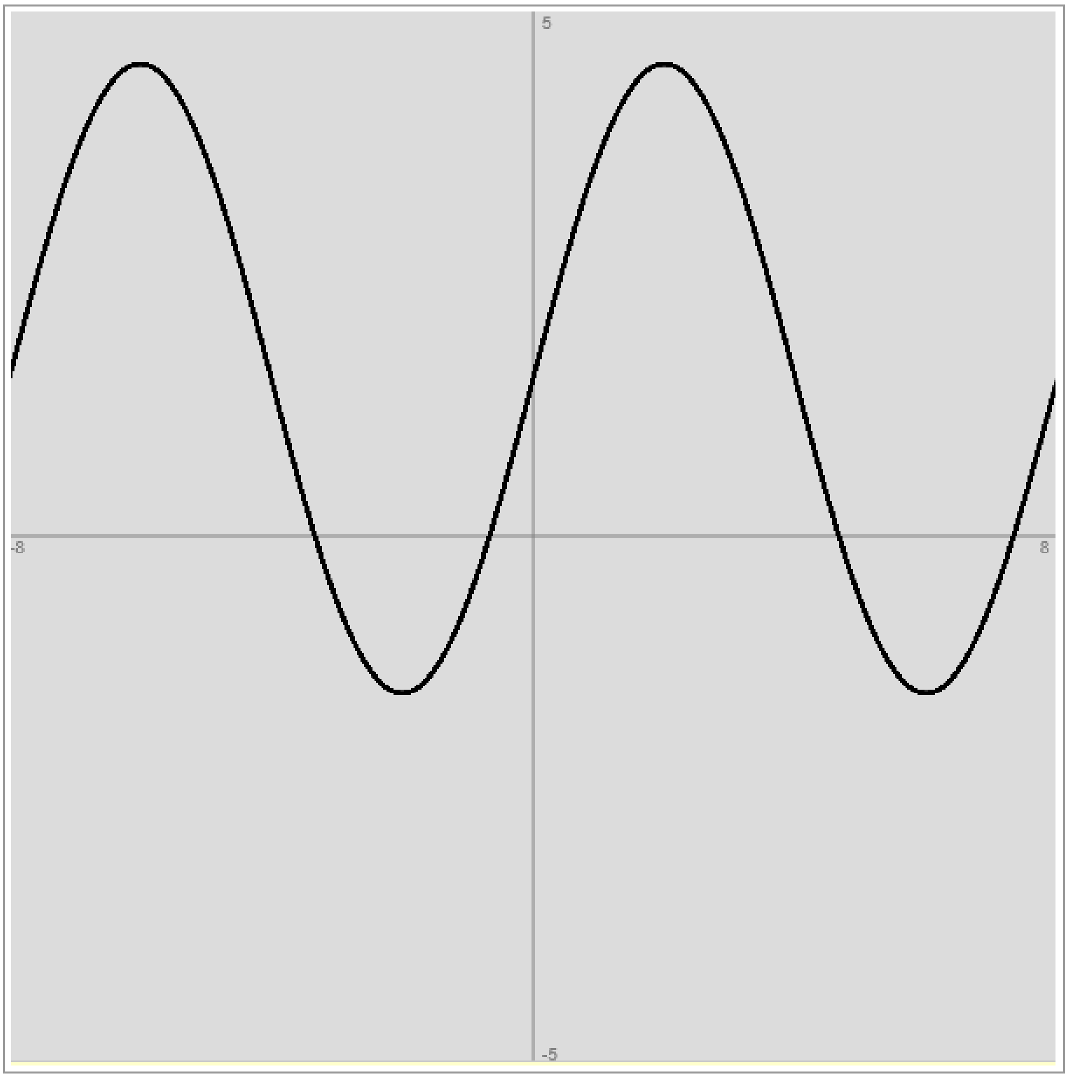
VI. Für die Wendepunkte der Funktion f(x) ist die 2. Ableitung zu betrachten, also mit der der Substitution z = πx/4:

f''(x) = 0 ⇔ $-\frac{3\pi^2}{16}\sin(\frac{\pi}{4}x)$ = 0 ⇔ $\sin(\frac{\pi}{4}x)$ = 0 ⇔ sin(z) = 0 ⇔ z = iπ ⇔ πx/4 = iπ ⇔ x = 4ki

mit ganzzahligen i. Die Wendepunkte liegen an den Stellen x = -8 (i=-2), x = -4 (i=-1), x = 0 (i=0), x = 4 (i=1), x = 8 (i=2) vor wegen: f'''(-8) ≠ 0, f'''(-4) ≠ 0, f'''(0) ≠ 0, f'''(4) ≠ 0, f'''(8) ≠ 0. Die Wendepunkte lauten damit: W_1(-8|1,5), W_2(-4|1,5), W_3(0|1,5), W_4(4|1,5), W_5(8|1,5) mit f(-8) = f(-4) = f(0) = f(4) = f(8) = 1,5.

VII. Wertetabelle, Zeichnung (im Intervall [-8; 8]):

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-6	4.5	0	-1.8506	0	Hochpunkt H(-6|4.5)
-4	1.5	-2.3562	0	1.4534	Wendepunkt W(-4|1.5)
-3.33	-0.0068	-2.0374	0.9295	1.2568	Nullstelle N(-3.33|0)
-2	-1.5	0	1.8506	0	Tiefpunkt T(-2|-1.5)
-0.66	0.0136	2.0467	0.9169	-1.2625	Nullstelle N(-0.66|0)
0	1.5	2.3562	0	-1.4534	Schnittpunkt S_y(0|1.5) = Wendepunkt W(0|1.5)
2.01	4.4999	-0.0185	-1.8505	0.0114	Hochpunkt H(2.01|4.5)
4.01	1.4764	-2.3561	0.0145	1.4534	Wendepunkt W(4.01|1.5)
4.67	-0.0068	-2.0374	0.9295	1.2568	Nullstelle N(4.67|0)
6.01	-1.4999	0.0185	1.8505	-0.0114	Tiefpunkt T(6.01|-1.5)
7.34	0.0136	2.0467	0.9169	-1.2625	Nullstelle N(7.34|0)



2. Lösung: a) I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion f: D_f -> **R** mit y = f(x) zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x-Werte, für die der Funktionsterm f(x) gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y-Werte, die von der Funktion f(x) angenommen werden
- f(x) = 0 => Nullstellen der Funktion
- f'(x) = 0 => Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- f''(x) = 0 => Wendepunkte der Funktion
- f(-x) = f(x) bzw. f(-x) = -f(x) => Symmetrie der Funktion zur y-Achse bzw. zum Ursprung des Koordinatensystems
- f(x+p) = f(x) => Periodizität der Funktion mit Periode p.

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

Für die Sinusfunktion $y = \sin(x)$ ergeben sich dann die folgenden Eigenschaften:

- Definitionsbereich D_y = **R**
- Wertebereich W_y = [-1; 1]
- Nullstellen als Wendepunkte: N(iπ|0), iε**Z**
- Hochpunkte: H((4i+1)π/2|1), iε**Z**
- Tiefpunkte: T((4i+3)π/2|-1), iε**Z**
- Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
- Periode p = 2π,

nicht zuletzt auf Grund der Eigenschaften allgemeiner Sinusfunktionen vom Typ f(x) = asin(kx) + b mit Amplitude a, Periode p = 2π/k und Mittellinie b.

II. Wir nutzen die Eigenschaften der Sinusfunktion y = sin(x), um zunächst bzgl. der vorgegebenen Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ festzustellen: f(x) entsteht nämlich aus y = sin(x) durch Streckung entlang der x-Achse um den Faktor π/4 (<1; y = sin(πx/4)), durch Streckung entlang der y-Achse um den Faktor 3 (y = 3sin(πx/4)) und durch Verschiebung entlang der y-Achse um den Wert 3/2 nach oben (f(x) = 3sin(πx/4)+3/2). Entsprechend gilt für den Wertebereich auf der Grundlage des Wertebereichs der Sinusfunktion y = sin(x), W_y = [-1;1]: W_f = [3·(-1)+1,5; 3·1+1,5] = [-1,5; 4,5].

III. Die Periode p der Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ ergibt sich vermöge der Formel p = 2π/k bei f(x) = asin(kx) + b als:

$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8\,.$$

IV. Die Nullstellen der Funktion f(x) ergeben sich mit Hilfe der Substitution z = πx/4 aus den folgenden Gleichungsumformungen:

f(x) = 0 ⇔ $3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ = 0 ⇔ 3sin(z)+1,5 = 0 ⇔ 3sin(z) = -1,5 ⇔ sin(z) = -0,5 ⇔
z = -π/6 + 2iπ, z = -5π/6 + 2iπ ⇔ πx/4 = -π/6 + 2iπ, πx/4 = -5π/6 + 2iπ ⇔
x = -2/3 + 8i, x = -10/3 + 8i

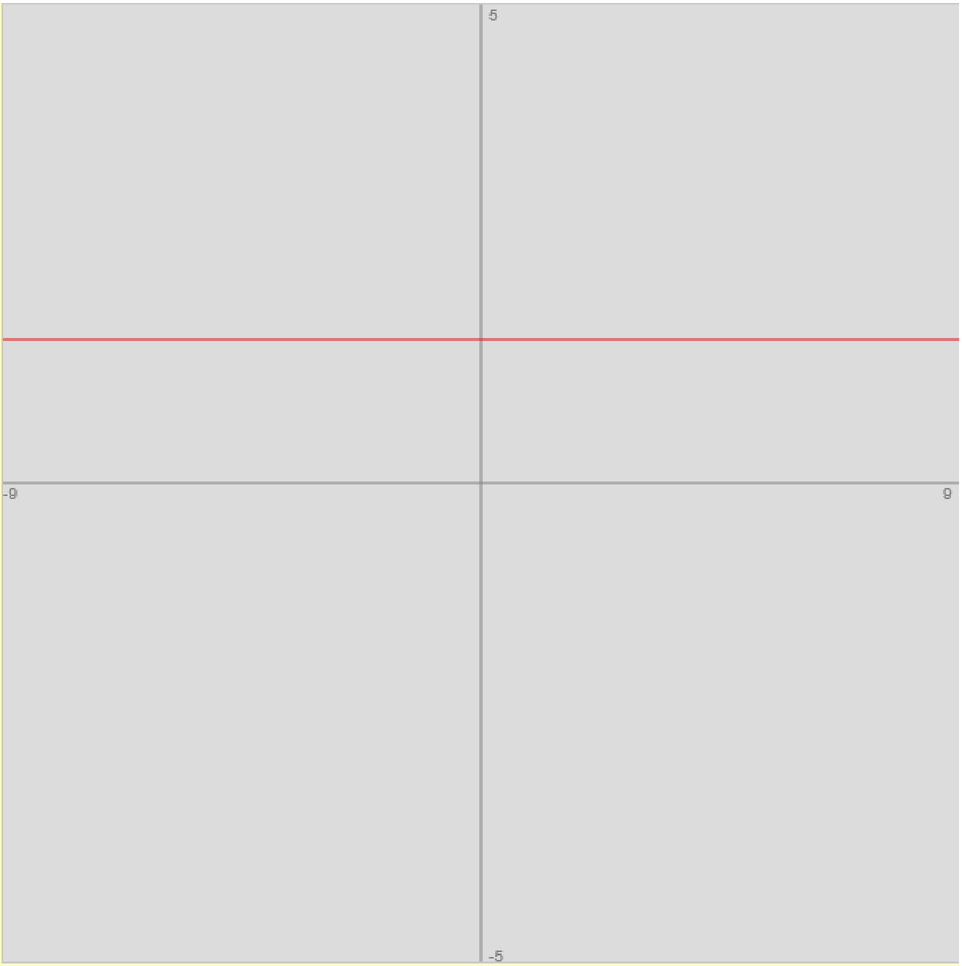
mit ganzzahligen i. Wir wählen nun die i aus, so dass die x-Werte im Intervall [-8; 8] liegen und haben damit: x = -10/3, x = -2/3 (i=0), x = 14/3, x = 22/3 (i=1). Die Nullstellen lauten daher: N_1(-10/3|0), N_2(-2/3|0), N_3(14/3|0), N_4(22/3).

IV. Die Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ vom Typ f(x) = asin(kx) + b hat die Amplitude a =3, die Periode p=8 und bewegt sich laut Wertebereich W_f = [-1,5|4,5] zwischen den parallelen Geraden y = b-a = -1,5 und y = b+a = 4,5 um die Mittellinie y = b = 1,5 periodisch hin und her. Die Punkte, in denen die Funktion die Mittellinie schneidet, sind die Wendepunkte von f(x) und liegen im Periodenintervall [0; 8] folglich bei: W(0|1,5), W(4|1,5), W(8|1,5) (x=0, x=p/2=4, x=p=8). Ergänzt für das Intervall [-8; 0] ergeben sich insgesamt als Wendepunkte: W_1(-8|1,5), W_2(-4|1,5), W_3(0|1,5), W_4(4|1,5), W_5(8|1,5).

V. Hoch- und Tiefpunkte liegen bei der $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$ vom Typ f(x) = asin(kx) + b exakt in der Mitte zwischen den Mittellinien- bzw. Wendepunkten auf den Geraden y = 4,5 bzw. y = -1,5. Wir haben damit die Hoch- und Tiefpunkte: H_1(-6|4,5), T_1(-2|-1,5), H_2(2|4,5), T_2(6|-1,5) (x=p/4=2, x=3p/4=6).

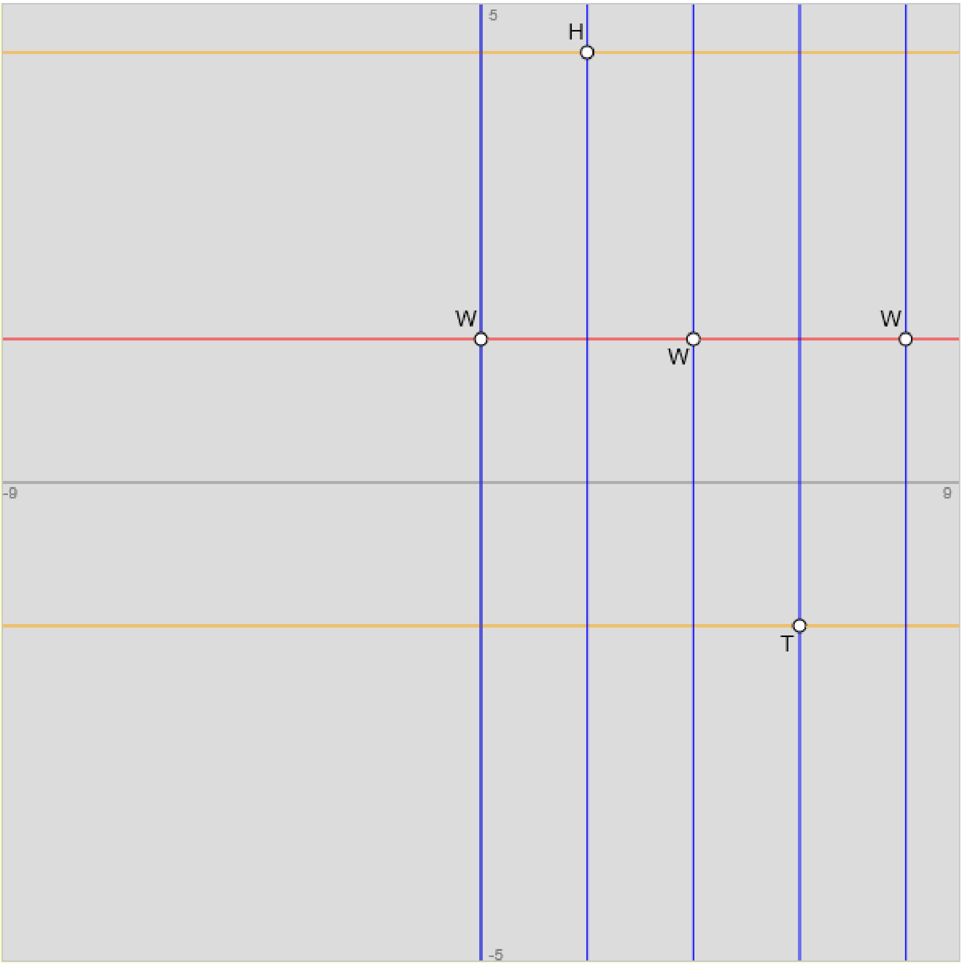
VI. Die Argumentation bzgl. der Hoch-, Tief- und Wendepunkte wird unterstützt durch die folgende Vorgehensweise beim Zeichnen der Funktion $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$:

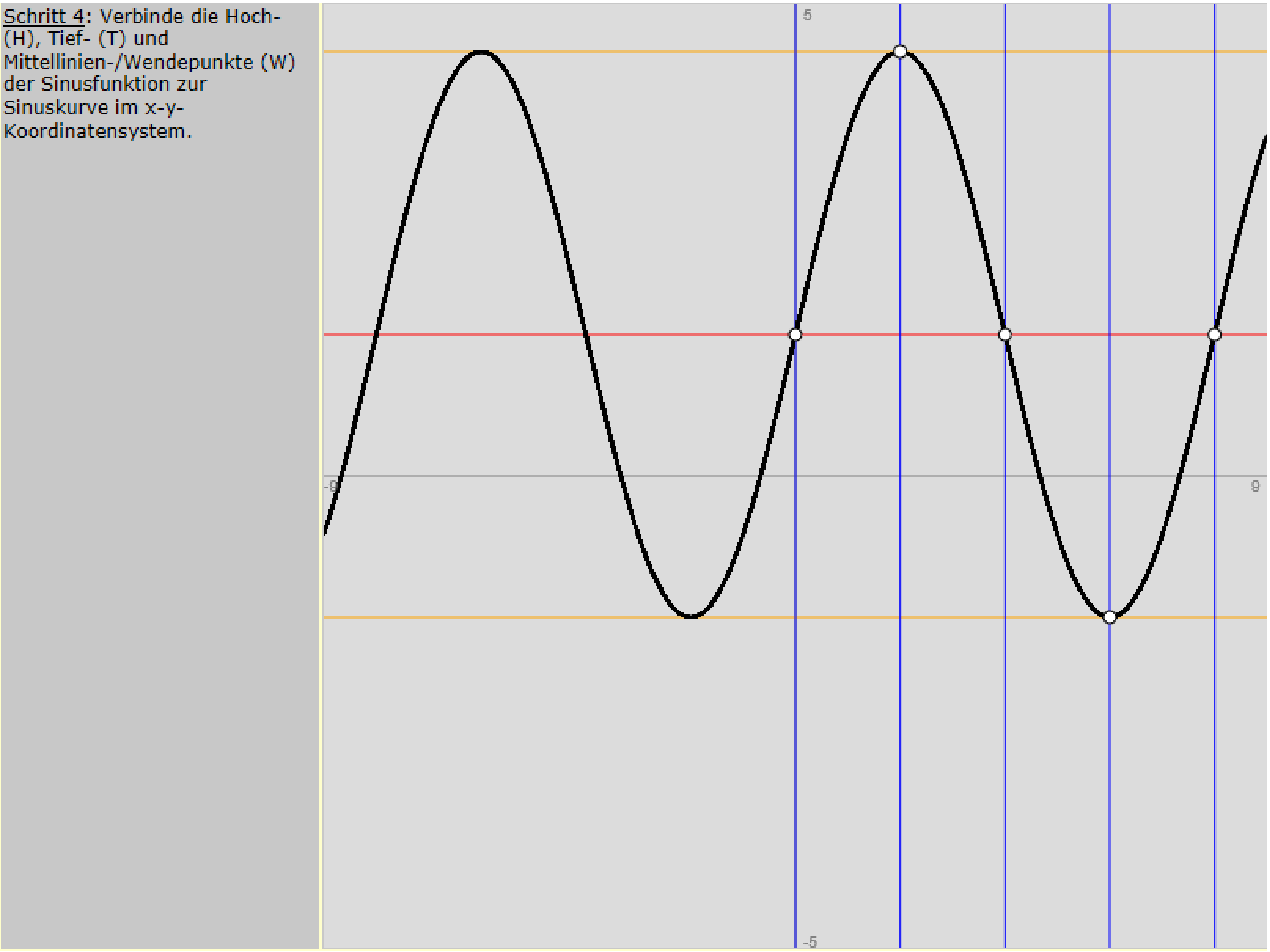
Schritt 1: Zeichne die zur x-Achse parallele Mittellinie y = b = 1.5 der Sinusfunktion in das x-y-Koordinatensystem ein.



Schritt 2: Zeichne im Abstand |a| = 3 von der Mittellinie b = 1.5 die parallelen Geraden y = b - |a| = 4.5 und y = b + |a| = -1.5 in das x-y-Koordinatensystem ein. Die Sinusfunktion verläuft dann im Streifen zwischen diesen Parallelen; die Hochpunkte befinden sich auf der Geraden y = 4.5, die Tiefpunkte auf der Geraden y = -1.5.

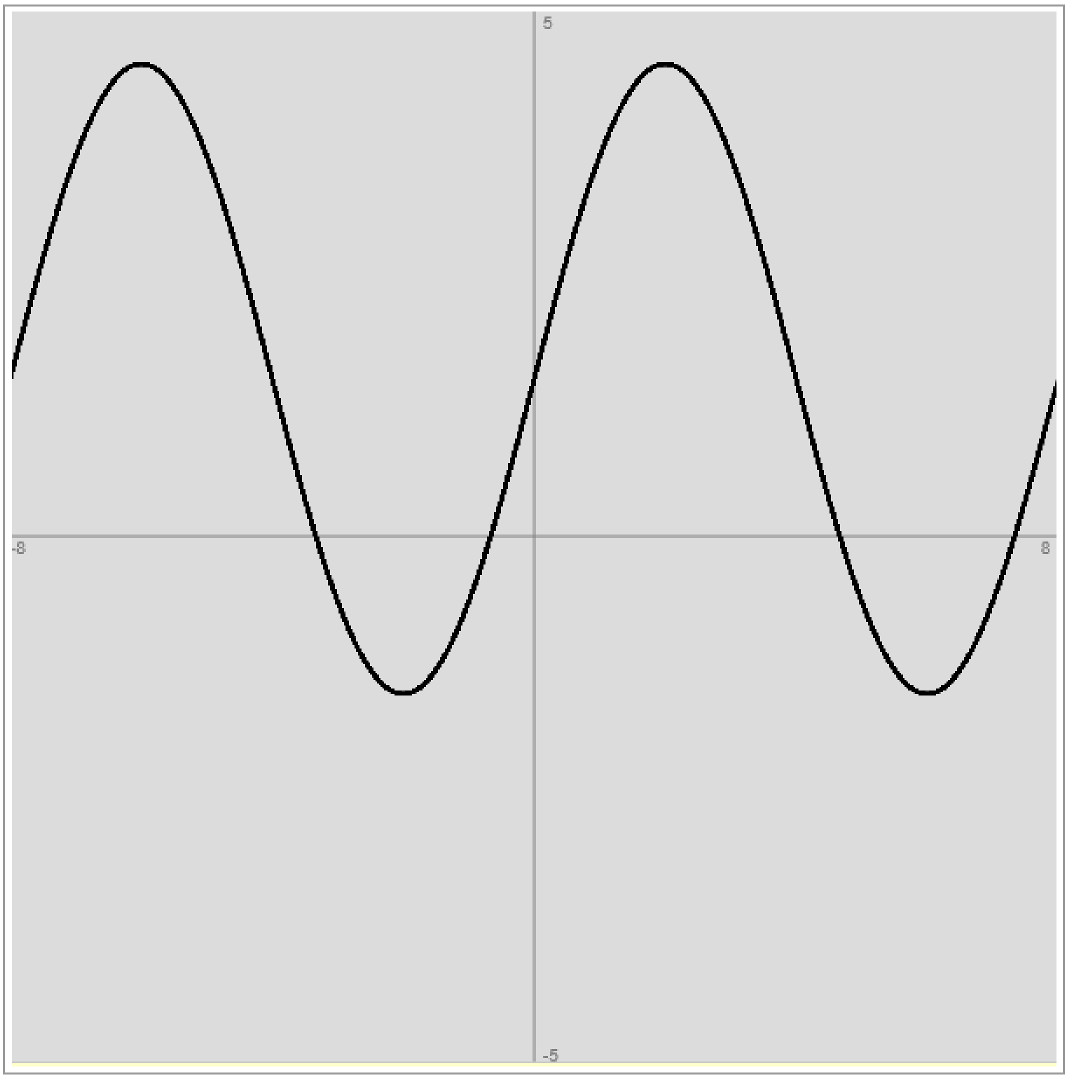
Schritt 3: Die Periode der Sinusfunktion beträgt p = 2π/k = 8. Innerhalb einer Periode, etwa zwischen x = 0 und x = 8, verläuft die Sinuskurve von der Mittellinie (x=0, W) zum Hochpunkt (x=2, H, 1. Periodenviertel), vom Hochpunkt zur Mittellinie (x=4, W, 2. Periodenviertel), von der Mittellinie zum Tiefpunkt (x=6, T, 3. Periodenviertel), vom Tiefpunkt zur Mittellinie (x=8, W, 4. Periodenviertel).





VII. Wertetabelle, Zeichnung (im Intervall [-8; 8]):

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-6	4.5	0	-1.8506	0	Hochpunkt H(-6|4.5)
-4	1.5	-2.3562	0	1.4534	Wendepunkt W(-4|1.5)
-3.33	-0.0068	-2.0374	0.9295	1.2568	Nullstelle N(-3.33|0)
-2	-1.5	0	1.8506	0	Tiefpunkt T(-2|-1.5)
-0.66	0.0136	2.0467	0.9169	-1.2625	Nullstelle N(-0.66|0)
0	1.5	2.3562	0	-1.4534	Schnittpunkt S_y(0|1.5) = Wendepunkt W(0|1.5)
2.01	4.4999	-0.0185	-1.8505	0.0114	Hochpunkt H(2.01|4.5)
4.01	1.4764	-2.3561	0.0145	1.4534	Wendepunkt W(4.01|1.5)
4.67	-0.0068	-2.0374	0.9295	1.2568	Nullstelle N(4.67|0)
6.01	-1.4999	0.0185	1.8505	-0.0114	Tiefpunkt T(6.01|-1.5)
7.34	0.0136	2.0467	0.9169	-1.2625	Nullstelle N(7.34|0)



www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 345