Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die allgemein durch reelle Parameter a, b, c ($a \neq 0$, $b \neq 0$) vorgegebene Funktion $f(x) = e^{ax}(bx+c)$ auf: Achsenschnittpunkte, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte und das Verhalten für betragsmäßig große x.

Lösung: I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion $f: D_f \to \mathbf{R}$ mit $y = f(x)$ zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x-Werte, für die der Funktionsterm f(x) gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y-Werte, die von der Funktion f(x) angenommen werden
- $f(x) = 0$ => Nullstellen der Funktion
- $f'(x) = 0$ => Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- $f''(x) = 0$ => Wendepunkte der Funktion
- $x \to +\infty$: $f(x) \to \pm\infty$ oder $f(x) \to y_0 = y$ als waagerechte Tangente bzw.: $x \to -\infty$: $f(x) \to \pm\infty$ oder $f(x) \to y_0 = y$ als waagerechte Asymptote

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

II. Der Schnittpunkt der Funktion $f(x) = e^{ax}(bx+c)$ mit der y-Achse, der y-Achsenabschnittspunkt errechnet sich aus $f(0) = e^0(0+c) = 1 \cdot c = c$ als: $S_y(0|c)$.

III. Die Nullstelle der Funktion f(x) ergibt sich als Lösung der Gleichung:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(bx+c) = 0 \Leftrightarrow bx+c = 0 \Leftrightarrow bx = -c \Leftrightarrow x = -c/b$ (wegen $b \neq 0$)

und damit als: $N(-c/b|0)$.

IV. Als Ableitungen ergeben sich nach der Produkt- und Kettenregel:

a) $f(x) = e^{ax}(bx+c)$ => $u(x) = e^{ax}$, $u'(x) = ae^{ax}$, $v(x) = bx+c$, $v'(x) = b$ =>

$$f'(x) = ae^{ax}(bx+c) + e^{ax}b = e^{ax}[a(bx+c)+b] = e^{ax}(abx+ac+b)$$

b) $f'(x) = e^{ax}(abx+ac+b)$ => $u(x) = e^{ax}$, $u'(x) = ae^{ax}$, $v(x) = abx+ac+b$, $v'(x) = ab$ =>

$$f''(x) = ae^{ax}(abx+ac+b)+e^{ax}ab = e^{ax}[a(abx+ac+b)+ab] = e^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab)$$

c) $f''(x) = e^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab)$ => $u(x) = e^{ax}$, $u'(x) = ae^{ax}$, $v(x) = a^2bx+a^2c+2ab$, $v'(x) = a^2b$ =>

$$f'''(x) = ae^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab)+e^{ax}a^2b = e^{ax}[a(a^2bx+a^2c+2ab)+a^2b] = e^{ax}(a^3bx+a^3c+3a^2b)$$

V. Für eventuelle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f(x) gilt:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(abx+ac+b) = 0 \Leftrightarrow abx+ac+b = 0 \Leftrightarrow abx = -ac-b \Leftrightarrow x = (-ac-b)/(ab) = -c/b-1/a$ (wegen $a\neq 0$, $b\neq 0$).

Einsetzen der Nullstelle der 1. Ableitung in die (oben noch nicht zusammengefasste) 2. Ableitung ergibt (auf Grund von $abx+ac+b = 0$ für $x = (-ac-b)/(ab)$):

$f''((-ac-b)/(ab)) = e^{(-ac-b)/b}[0+ab] = abe^{(-ac-b)/b} = (*)$.

Wegen $abe^{(-ac-b)/b} > 0$ ist der Ausdruck (*) positiv, wenn $a>0$ und $b>0$ oder $a<0$ und $b<0$ gilt; in dem Fall liegt ein Tiefpunkt vor. Der Ausdruck (*) ist negativ, wenn $a>0$ und $b<0$ oder $a<0$ und $b>0$ gilt; in dem Fall liegt ein Hochpunkt vor. Der Funktionswert an der Stelle $x = (-ac-b)/(ab) = -c/b-1/a$ beträgt:

$f((-ac-b)/(ab)) = e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c]$,

so dass als Tief- oder Hochpunkt

$T(-c/b-1/a|e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c])$ bzw. $H(-c/b-1/a|e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c])$

folgt.

Nebenher gilt bei maximaler Definitionsmenge $D_f = \mathbf{R}$ für den Wertebereich:

$W_f = [e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c]; \infty)$ (falls ein Tiefpunkt vorliegt)
$W_f = (-\infty; e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c])$ (falls ein Hochpunkt vorliegt).

VI. Für eventuelle Wendepunkte gilt:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab) = 0 \Leftrightarrow a^2bx+a^2c+2ab = 0 \Leftrightarrow abx+ac+2b = 0 \Leftrightarrow abx = -ac-2b \Leftrightarrow$
$x = (-ac-2b)/(ab) = -c/b-2/a$ (wegen $a\neq 0$, $b\neq 0$).

Einsetzen der Nullstelle der 2. Ableitung in die (oben noch nicht zusammengefasste) 3. Ableitung ergibt (auf Grund von $a^2bx+a^2c+2ab = 0$ für $x = (-ac-2b)/(ab)$):

$f'''((-ac-2b)/(ab)) = e^{(-ac-2b)/b}[0+a^2b] = a^2be^{(-ac-2b)/b} = (**)$.

Der Ausdruck (**) ungleich null, weil $a\neq 0$, $b\neq 0$ ist. Somit liegt an der Stelle $x = (-ac-2b)/(ab) = -c/b-2/a$ ein Wendepunkt vor mit:

$f((-ac-2b)/(ab)) = e^{(-ac-2b)/b}[(-ac-2b)/a+c]$

und:

$W((-ac-2b)/(ab)|\, e^{(-ac-2b)/b}[(-ac-2b)/a+c])$.

VII. Das Verhalten für betragsmäßig große x erklärt sich aus dem Verhalten des Exponentialanteils $u(x) = e^{ax}$ der Funktion f(x), also aus:

$x\to+\infty$: $e^{ax} \to +\infty$ bzw.: $x\to-\infty$: $e^{ax} \to 0 = y$ waagerechte Asymptote (für $a>0$)
$x\to+\infty$: $e^{ax} \to 0 = y$ waagerechte Asymptote bzw.: $x\to-\infty$: $e^{ax} \to +\infty$ (für $a<0$).

Somit gilt:

$x\to+\infty$: $f(x) \to +\infty$ bzw.: $x\to-\infty$: $f(x) \to 0 = y$ waagerechte Asymptote (für $a>0$, $b>0$)
$x\to+\infty$: $f(x) \to -\infty$ bzw.: $x\to-\infty$: $f(x) \to 0 = y$ waagerechte Asymptote (für $a>0$, $b<0$)
$x\to-\infty$: $f(x) \to -\infty$ bzw.: $x\to+\infty$: $f(x) \to 0 = y$ waagerechte Asymptote (für $a<0$, $b>0$)
$x\to-\infty$: $f(x) \to +\infty$ bzw.: $x\to+\infty$: $f(x) \to 0 = y$ waagerechte Asymptote (für $a<0$, $b<0$)

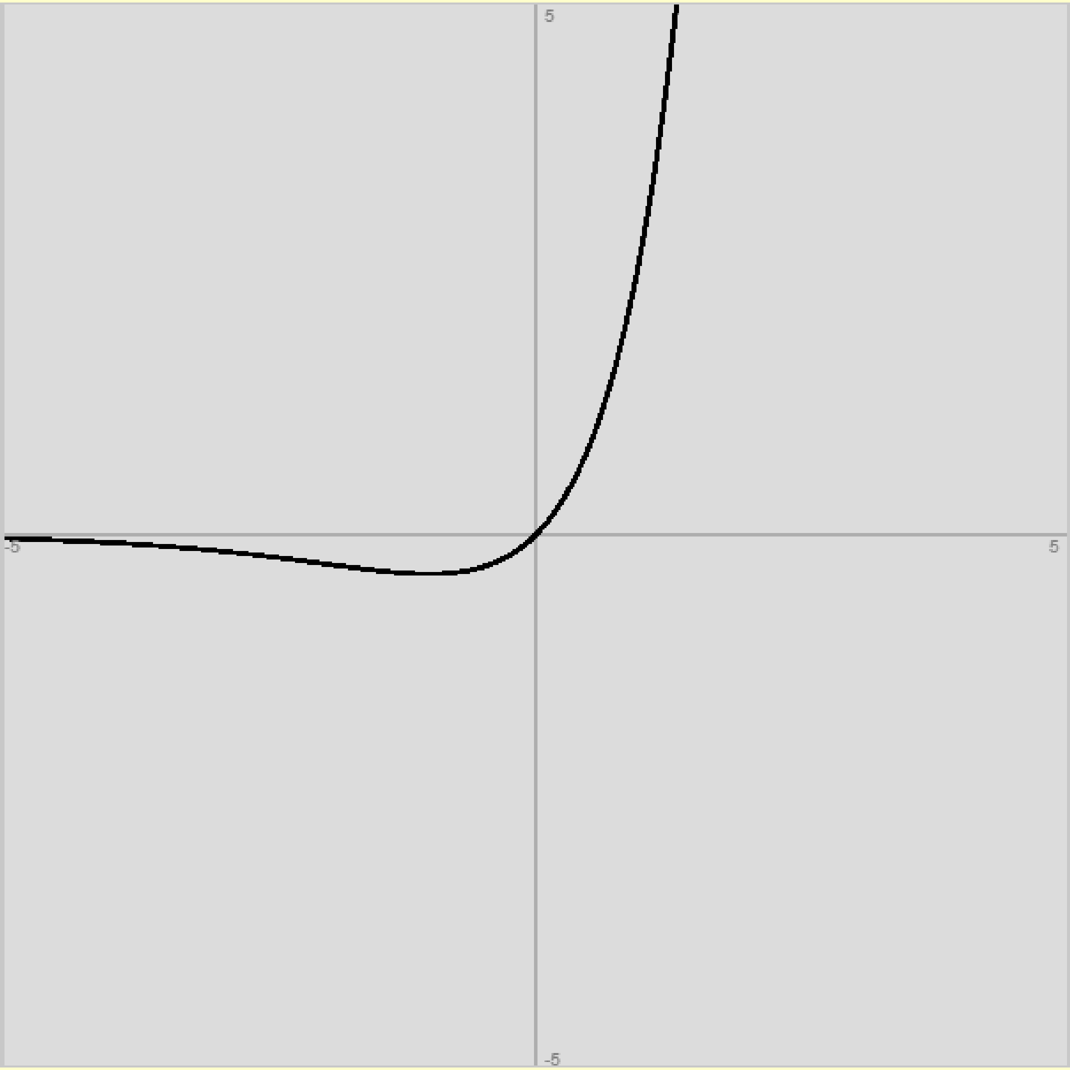
VIII. Wir betrachten entsprechend dem Verhalten für betragsmäßig große x für vier Fälle von a, b, c Wertetabelle, Zeichnung der Exponentialfunktion $f(x) = e^{ax}(bx+c)$ mit ganz rationalem Anteil:

1. Fall (a>0, b>0): a=1, b=1, c=0 => f(x) = $e^x x$:

Funktion: f(x) = e^(x)*x

Wertetabelle:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	-0.2707	-0.1353	0	0.1353	Wendepunkt W(-2|-0.27)
-1	-0.3679	0	0.3679	0.7358	Tiefpunkt T(-1|-0.37)
0	0	1	2	3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)



Funktion: f(x) = e^(x)*x

1. Ableitung: f'(x) = e^(x)*(x+1)

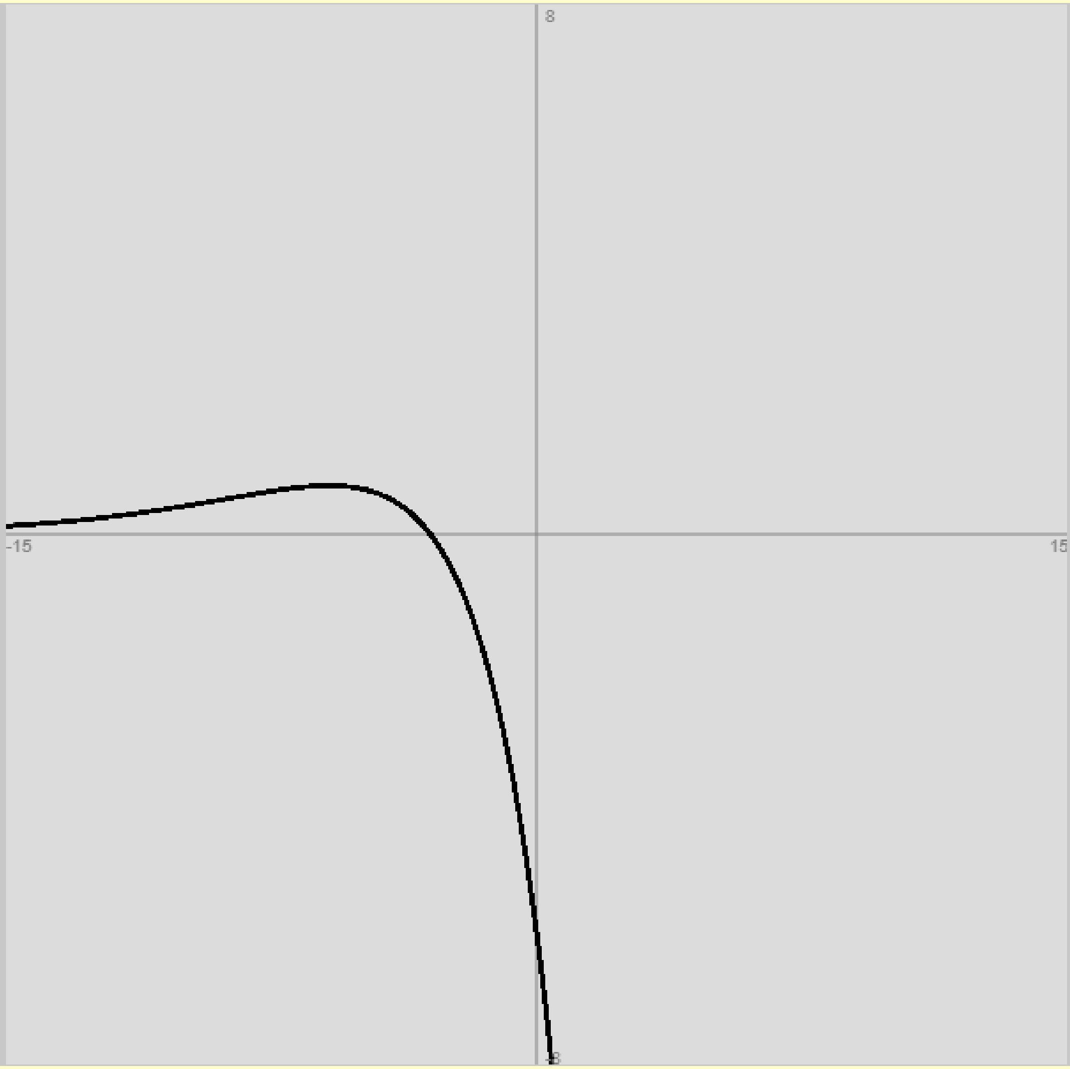
2. Ableitung: f''(x) = e^(x)*(x+2)

3. Ableitung: f'''(x) = e^(x)*(x+3)

2. Fall (a>0, b<0): a=0,35, b=-2, c=-6 => f(x) = $e^{0,35x}(2x–6)$:

Funktion: f(x) = e^(0.35*x)*(-2x-6)

Wertetabelle:					
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-8.71	0.5417	0.0947	0	-0.0116	Wendepunkt W(-8.71|0.54)
-5.85	0.7356	-0.0006	-0.0906	-0.0633	Hochpunkt H(-5.85|0.74)
-3	0	-0.6999	-0.4899	-0.2572	Nullstelle N(-3|0)
0	-6	-4.1	-2.135	-0.9922	Schnittpunkt S_y(0|-6)



Funktion: f(x) = e^(0.35*x)*(-2x-6)
1. Ableitung: f'(x) = e^(0.35*x)*(-0.7x-4.1)
2. Ableitung: f''(x) = e^(0.35*x)*(-0.245x-2.135)
3. Ableitung: f'''(x) = e^(0.35*x)*(-0.08575x-0.99225)

3. Fall (a<0, b>0): a=-0,1, b=0,5, c=-2 => $f(x) = e^{-0,1x}(0,5x-2)$:

Funktion: f(x) = e^(-0.1*x)*(0.5x-2)

Wertetabelle:					
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	-2	0.7	-0.12	0.017	Schnittpunkt $S_y(0\|-2)$
4	0	0.3352	-0.067	0.0101	Nullstelle N(4|0)
14	1.233	0	-0.0123	0.0025	Hochpunkt H(14|1.23)
24	0.9072	-0.0454	0	0.0005	Wendepunkt W(24|0.91)

Funktion: f(x) = e^(-0.1*x)*(0.5x-2)
1. Ableitung: f'(x) = e^(-0.1*x)*(-0.05x+0.7)
2. Ableitung: f''(x) = e^(-0.1*x)*(0.005x-0.12)
3. Ableitung: f'''(x) = e^(-0.1*x)*(-0.0005x+0.017)

4. Fall (a<0, b<0): a=-1,2, b=-10, c=2 => f(x) = $e^{-1,2x}(-10x+2)$:

Funktion: f(x) = e^(-1.2*x)*(-10x+2)

Wertetabelle:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	2	-12.4	26.88	-46.656	Schnittpunkt S_y(0|2)
0.2	0	-7.8663	18.8791	-33.9823	Nullstelle N(0.2|0)
1.04	-2.4115	0.023	3.4174	-8.2348	Tiefpunkt T(1.04|-2.41)
1.87	-1.7708	1.0646	-0.0051	-1.5208	Wendepunkt W(1.87|-1.77)

Funktion: f(x) = e^(-1.2*x)*(-10x+2)

1. Ableitung: f'(x) = e^(-1.2*x)*(12x-12.4)

2. Ableitung: f''(x) = e^(-1.2*x)*(-14.4x+26.88)

3. Ableitung: f'''(x) = e^(-1.2*x)*(17.28x-46.656)

www.michael-buhlmann.de / 10.2017 / Aufgabe 515