

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die allgemein durch reelle Parameter a, b, c ($a \neq 0, b \neq 0$) vorgegebene Funktion $f(x) = e^{ax}(bx+c)$ auf: Achsenschnittpunkte, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte und das Verhalten für betragsmäßig große x .

Lösung: a) I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit $y = f(x)$ zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x -Werte, für die der Funktionsterm $f(x)$ gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y -Werte, die von der Funktion $f(x)$ angenommen werden
- $f(x) = 0 \Rightarrow$ Nullstellen der Funktion
- $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- $f''(x) = 0 \Rightarrow$ Wendepunkte der Funktion
- $x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow \pm\infty$ oder $f(x) \rightarrow y_0 = y$ als waagerechte Tangente bzw.: $x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow \pm\infty$ oder $f(x) \rightarrow y_0 = y$ als waagerechte Asymptote

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

II. Der Schnittpunkt der Funktion $f(x) = e^{ax}(bx+c)$ mit der y -Achse, der y -Achsenabschnittpunkt errechnet sich aus $f(0) = e^{a \cdot 0}(0+c) = 1 \cdot c = c$ als: $S_y(0|c)$.

III. Die Nullstelle der Funktion $f(x)$ ergibt sich als Lösung der Gleichung:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(bx+c) = 0 \Leftrightarrow bx+c = 0 \Leftrightarrow bx = -c \Leftrightarrow x = -c/b \text{ (wegen } b \neq 0)$$

und damit als: $N(-c/b|0)$.

IV. Als Ableitungen ergeben sich nach der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= e^{ax}(bx+c) \Rightarrow u(x) = e^{ax}, u'(x) = ae^{ax}, v(x) = bx+c, v'(x) = b \Rightarrow \\ & f'(x) = ae^{ax}(bx+c) + e^{ax}b = e^{ax}[a(bx+c)+b] = e^{ax}(abx+ac+b) \\ \text{b) } f'(x) &= e^{ax}(abx+ac+b) \Rightarrow u(x) = e^{ax}, u'(x) = ae^{ax}, v(x) = abx+ac+b, v'(x) = ab \Rightarrow \\ & f''(x) = ae^{ax}(abx+ac+b) + e^{ax}ab = e^{ax}[a(abx+ac+b)+ab] = e^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab) \\ \text{c) } f''(x) &= e^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab) \Rightarrow u(x) = e^{ax}, u'(x) = ae^{ax}, v(x) = a^2bx+a^2c+2ab, v'(x) = a^2b \Rightarrow \\ & f'''(x) = ae^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab) + e^{ax}a^2b = e^{ax}[a(a^2bx+a^2c+2ab)+a^2b] = e^{ax}(a^3bx+a^3c+3a^2b) \end{aligned}$$

V. Für eventuelle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion $f(x)$ gilt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(abx+ac+b) = 0 \Leftrightarrow abx+ac+b = 0 \Leftrightarrow abx = -ac-b \Leftrightarrow x = (-ac-b)/(ab) = -c/b-1/a \text{ (wegen } a \neq 0, b \neq 0 \text{)}.$$

Einsetzen der Nullstelle der 1. Ableitung in die (oben noch nicht zusammengefasste) 2. Ableitung ergibt (auf Grund von $abx+ac+b = 0$ für $x = (-ac-b)/(ab)$):

$$f''((-ac-b)/(ab)) = e^{(-ac-b)/b}[0+ab] = abe^{(-ac-b)/b} = (*).$$

Wegen $abe^{(-ac-b)/b} > 0$ ist der Ausdruck (*) positiv, wenn $a > 0$ und $b > 0$ oder $a < 0$ und $b < 0$ gilt; in dem Fall liegt ein Tiefpunkt vor. Der Ausdruck (*) ist negativ, wenn $a > 0$ und $b < 0$ oder $a < 0$ und $b > 0$ gilt; in dem Fall liegt ein Hochpunkt vor. Der Funktionswert an der Stelle $x = (-ac-b)/(ab) = -c/b-1/a$ beträgt:

$$f((-ac-b)/(ab)) = e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c],$$

so dass als Tief- oder Hochpunkt

$$T(-c/b-1/a | e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c]) \text{ bzw. } H(-c/b-1/a | e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c])$$

folgt.

Nebenher gilt bei maximaler Definitionsmenge $D_f = \mathbf{R}$ für den Wertebereich:

$$W_f = [e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c]; \infty) \text{ (falls ein Tiefpunkt vorliegt)}$$

$$W_f = (-\infty; e^{(-ac-b)/b}[(-ac-b)/b+c]) \text{ (falls ein Hochpunkt vorliegt)}.$$

VI. Für eventuelle Wendepunkte gilt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(a^2bx+a^2c+2ab) = 0 \Leftrightarrow a^2bx+a^2c+2ab = 0 \Leftrightarrow abx+ac+2b = 0 \Leftrightarrow abx = -ac-2b \Leftrightarrow x = (-ac-2b)/(ab) = -c/b-2/a \text{ (wegen } a \neq 0, b \neq 0 \text{)}.$$

Einsetzen der Nullstelle der 2. Ableitung in die (oben noch nicht zusammengefasste) 3. Ableitung ergibt (auf Grund von $a^2bx+a^2c+2ab = 0$ für $x = (-ac-2b)/(ab)$):

$$f'''((-ac-2b)/(ab)) = e^{(-ac-2b)/b}[0+a^2b] = a^2be^{(-ac-2b)/b} = (**).$$

Der Ausdruck (**) ungleich null, weil $a \neq 0, b \neq 0$ ist. Somit liegt an der Stelle $x = (-ac-2b)/(ab) = -c/b-2/a$ ein Wendepunkt vor mit:

$$f((-ac-2b)/(ab)) = e^{(-ac-2b)/b}[(-ac-2b)/a+c]$$

und:

$$W((-ac-2b)/(ab) | e^{(-ac-2b)/b}[(-ac-2b)/a+c]).$$

VII. Das Verhalten für betragsmäßig große x erklärt sich aus dem Verhalten des Exponentialanteils $u(x) = e^{ax}$ der Funktion $f(x)$, also aus:

$$x \rightarrow +\infty: e^{ax} \rightarrow +\infty \text{ bzw.: } x \rightarrow -\infty: e^{ax} \rightarrow 0 = y \text{ waagerechte Asymptote (für } a > 0 \text{)}$$

$$x \rightarrow +\infty: e^{ax} \rightarrow 0 = y \text{ waagerechte Asymptote bzw.: } x \rightarrow -\infty: e^{ax} \rightarrow +\infty \text{ (für } a < 0 \text{)}.$$

Somit gilt:

$$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow +\infty \text{ bzw.: } x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 0 = y \text{ waagerechte Asymptote (für } a > 0, b > 0 \text{)}$$

$$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow -\infty \text{ bzw.: } x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 0 = y \text{ waagerechte Asymptote (für } a > 0, b < 0 \text{)}$$

$$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow -\infty \text{ bzw.: } x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow 0 = y \text{ waagerechte Asymptote (für } a < 0, b > 0 \text{)}$$

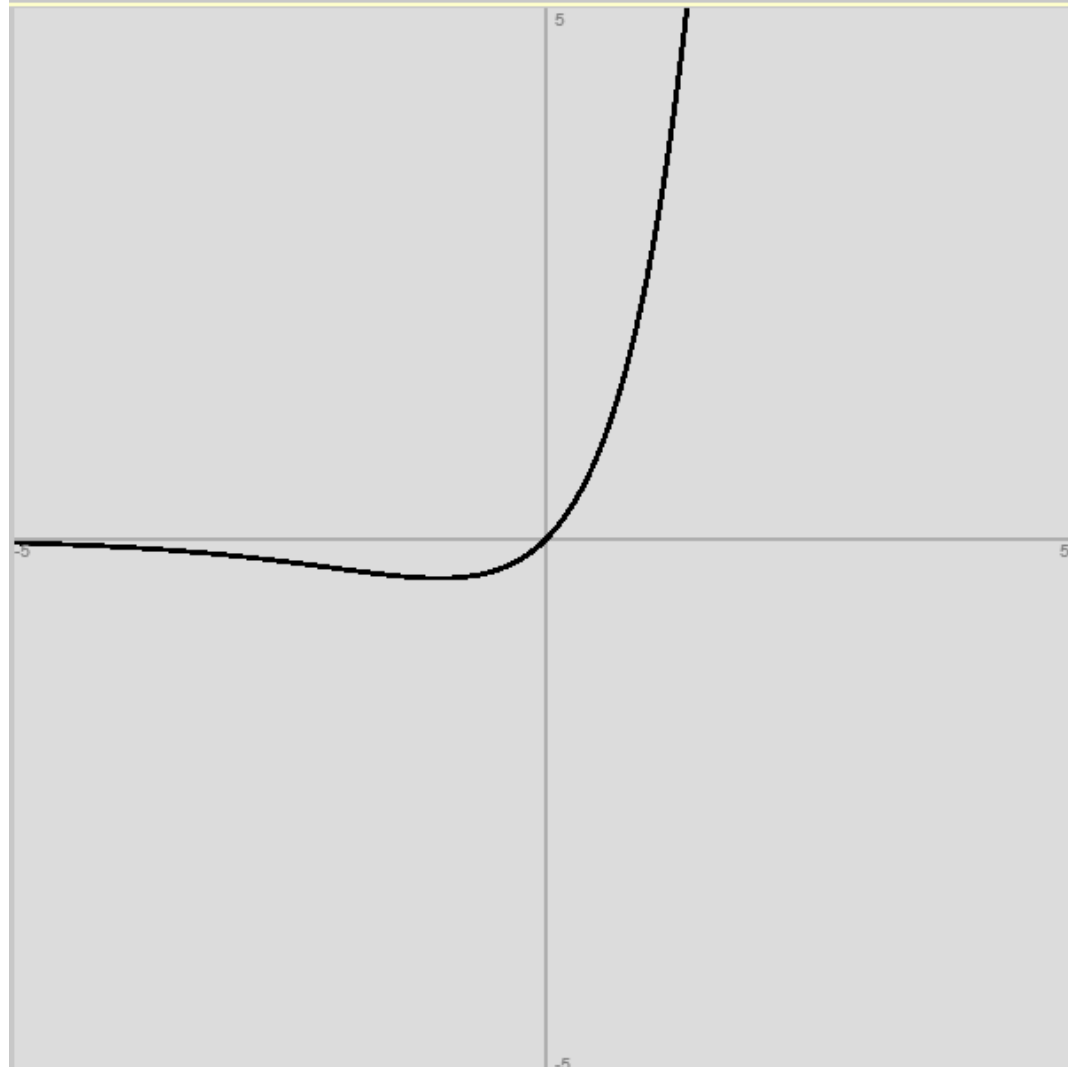
$$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow +\infty \text{ bzw.: } x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow 0 = y \text{ waagerechte Asymptote (für } a < 0, b < 0 \text{)}$$

VIII. Wir betrachten entsprechend dem Verhalten für betragsmäßig große x für vier Fälle von a, b, c Wertetabelle, Zeichnung der Exponentialfunktion $f(x) = e^{ax}(bx+c)$ mit ganz rationalem Anteil:

1. Fall ($a > 0, b > 0$): $a=1, b=1, c=0 \Rightarrow f(x) = e^x x$:

Funktion: $f(x) = e^x x$

Wertetabelle:					
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	-0.2707	-0.1353	0	0.1353	Wendepunkt W(-2 -0.27)
-1	-0.3679	0	0.3679	0.7358	Tiefpunkt T(-1 -0.37)
0	0	1	2	3	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$



Funktion: $f(x) = e^x x$

1. Ableitung: $f'(x) = e^x (x+1)$

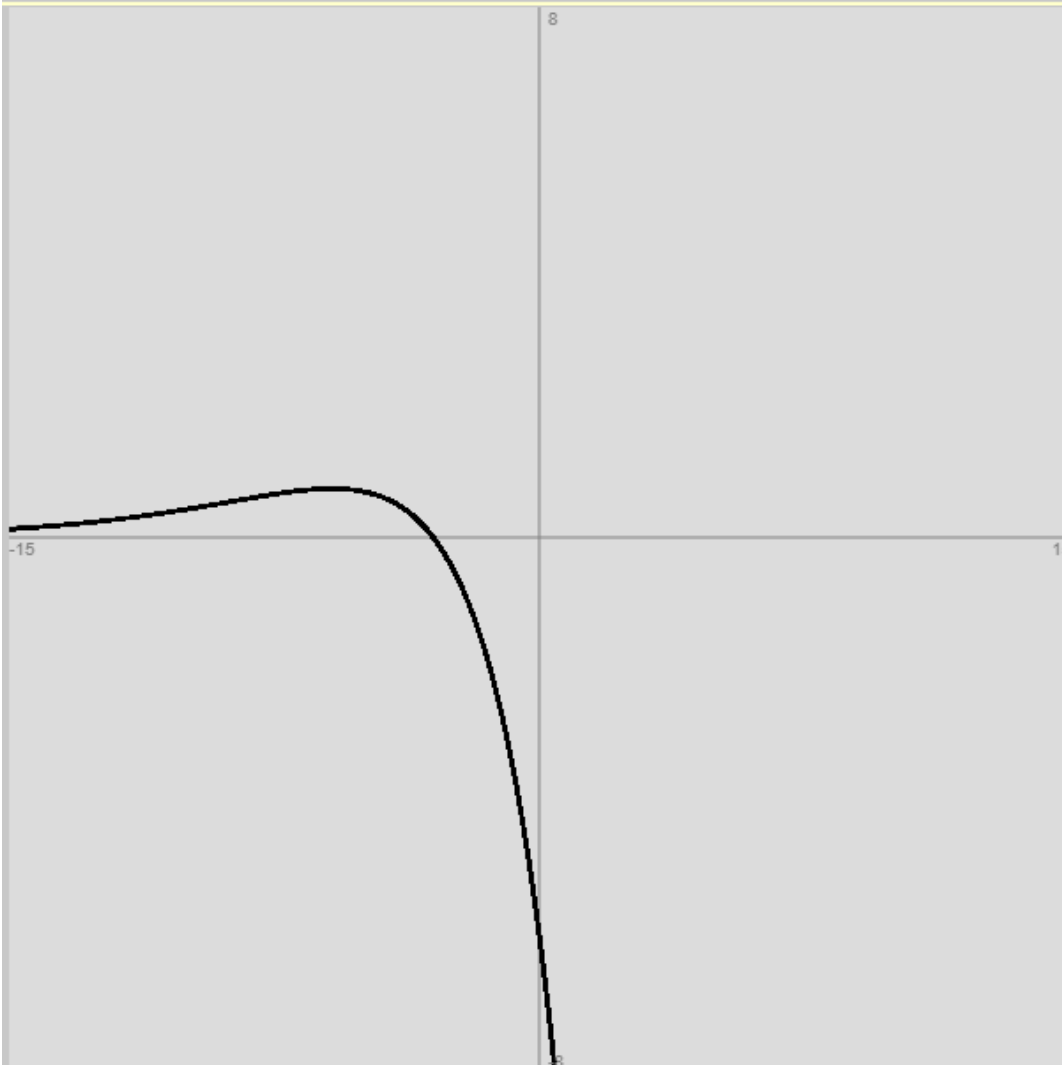
2. Ableitung: $f''(x) = e^x (x+2)$

3. Ableitung: $f'''(x) = e^x (x+3)$

2. Fall ($a>0, b<0$): $a=0,35, b=-2, c=-6 \Rightarrow f(x) = e^{0,35x}(2x-6)$:

Funktion: $f(x) = e^{(0.35*x)*(-2x-6)}$

Wertetabelle:					
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-8.71	0.5417	0.0947	0	-0.0116	Wendepunkt W(-8.71 0.54)
-5.85	0.7356	-0.0006	-0.0906	-0.0633	Hochpunkt H(-5.85 0.74)
-3	0	-0.6999	-0.4899	-0.2572	Nullstelle N(-3 0)
0	-6	-4.1	-2.135	-0.9922	Schnittpunkt $S_y(0 -6)$



Funktion: $f(x) = e^{(0.35*x)*(-2x-6)}$

1. Ableitung: $f'(x) = e^{(0.35*x)*(-0.7x-4.1)}$

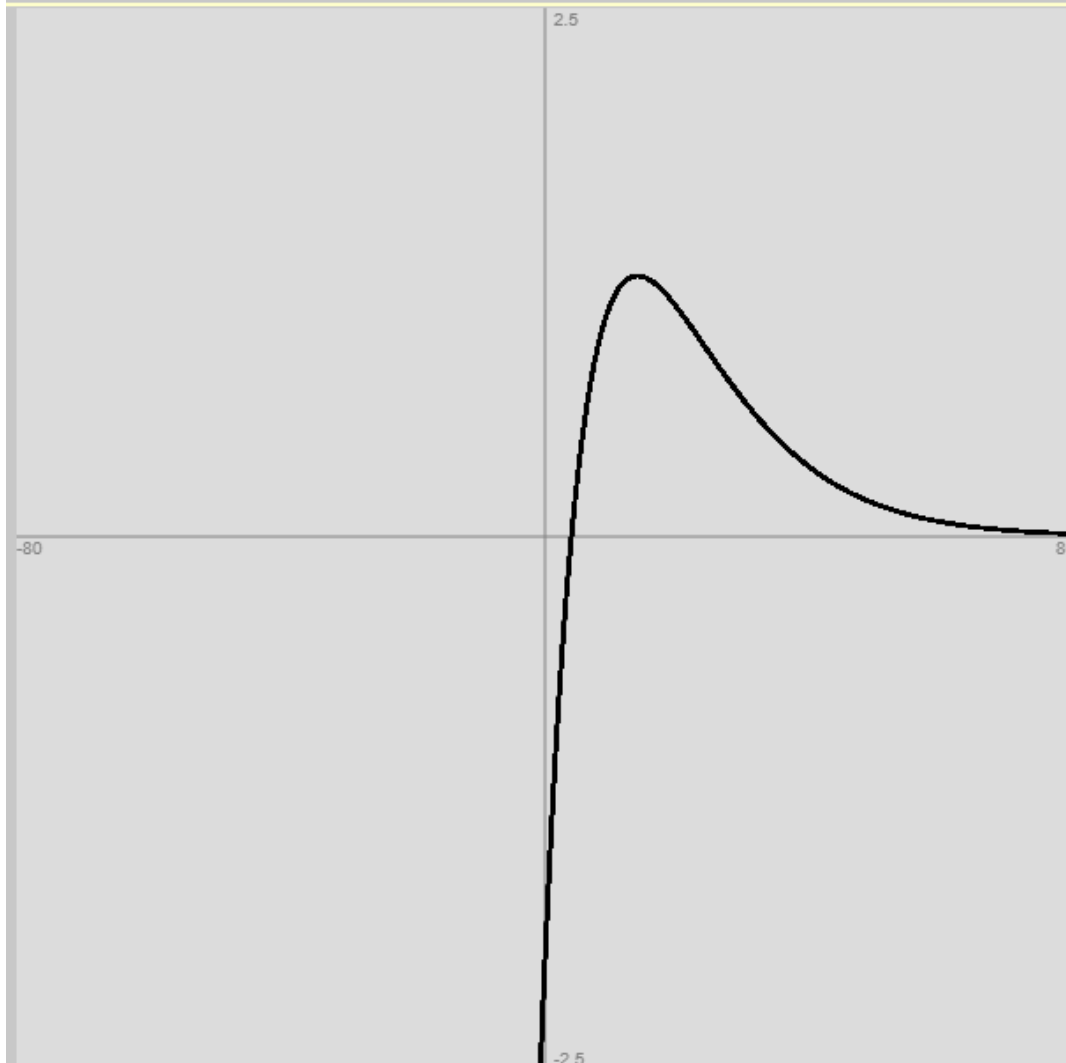
2. Ableitung: $f''(x) = e^{(0.35*x)*(-0.245x-2.135)}$

3. Ableitung: $f'''(x) = e^{(0.35*x)*(-0.08575x-0.99225)}$

3. Fall ($a < 0, b > 0$): $a = -0,1, b = 0,5, c = -2 \Rightarrow f(x) = e^{-0,1x}(0,5x-2)$:

Funktion: $f(x) = e^{(-0.1*x)*(0.5x-2)}$

Wertetabelle:					
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-2	0.7	-0.12	0.017	Schnittpunkt $S_y(0 -2)$
4	0	0.3352	-0.067	0.0101	Nullstelle $N(4 0)$
14	1.233	0	-0.0123	0.0025	Hochpunkt $H(14 1.23)$
24	0.9072	-0.0454	0	0.0005	Wendepunkt $W(24 0.91)$



Funktion: $f(x) = e^{(-0.1*x)*(0.5x-2)}$

1. Ableitung: $f'(x) = e^{(-0.1*x)*(-0.05x+0.7)}$

2. Ableitung: $f''(x) = e^{(-0.1*x)*(0.005x-0.12)}$

3. Ableitung: $f'''(x) = e^{(-0.1*x)*(-0.0005x+0.017)}$

4. Fall ($a < 0, b < 0$): $a = -1,2, b = -10, c = 2 \Rightarrow f(x) = e^{-1,2x}(-10x+2)$:

Funktion: $f(x) = e^{(-1.2*x)*(-10x+2)}$

Wertetabelle:					
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	2	-12.4	26.88	-46.656	Schnittpunkt $S_y(0 2)$
0.2	0	-7.8663	18.8791	-33.9823	Nullstelle $N(0.2 0)$
1.04	-2.4115	0.023	3.4174	-8.2348	Tiefpunkt $T(1.04 -2.41)$
1.87	-1.7708	1.0646	-0.0051	-1.5208	Wendepunkt $W(1.87 -1.77)$



Funktion: $f(x) = e^{(-1.2*x)*(-10x+2)}$

1. Ableitung: $f'(x) = e^{(-1.2*x)*(12x-12.4)}$

2. Ableitung: $f''(x) = e^{(-1.2*x)*(-14.4x+26.88)}$

3. Ableitung: $f'''(x) = e^{(-1.2*x)*(17.28x-46.656)}$