

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ auf Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Pole, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein ist hinsichtlich einer Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit $y = f(x)$ zu beachten:

- Definitionsbereich D_f als Menge aller x -Werte, für die der Funktionsterm $f(x)$ gültig ist
- Wertebereich W_f als Menge aller y -Werte, die von der Funktion $f(x)$ angenommen werden
- $f(x) = 0 \Rightarrow$ Nullstellen der Funktion
- $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion
- $f''(x) = 0 \Rightarrow$ Wendepunkte der Funktion
- $x \rightarrow x_0: f(x) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow x_0$ als Polstelle (senkrechte Asymptote) mit/ohne Vorzeichenwechsel
- $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Symmetrie der Funktion zur y -Achse bzw. zum Ursprung des Koordinatensystems
- $x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow \pm\infty$ oder $f(x) \rightarrow y_0 = y$ als waagerechte Tangente bzw.: $x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow \pm\infty$ oder $f(x) \rightarrow y_0 = y$ als waagerechte Asymptote

Bei Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkten sind noch hinreichende Bedingungen der 2. bzw. 3. Ableitung zu untersuchen.

II. Definitionsbereich: Auszuschließen ist zunächst das x , bei dem der Nenner des Bruchs $\frac{x+1}{x-1}$

(als innere Funktion) Null wird, also:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Der natürliche Logarithmus ist definiert, wenn sein Argument positiv ist, nun ist der Term $\left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

positiv, wenn $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \neq 0$ gilt, also:

$$\frac{x+1}{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1.$$

Der Definitionsbereich ist damit: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

III. Ableitungen: Die Funktion $f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ lässt sich nach den Logarithmengesetzen (hier:

$\ln(u/v) = \ln(u) - \ln(v)$) umschreiben zu:

$$f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln|x+1| - \ln|x-1| \quad (\text{Funktion}),$$

so dass für die Ableitungen gemäß der Regel $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = (x+1)^{-1} - (x-1)^{-1} \quad (1. \text{ Ableitung})$$

$$f''(x) = -(x+1)^{-2} + (x-1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad (2. \text{ Ableitung})$$

$$f'''(x) = 2(x+1)^{-3} - 2(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x-1)^3} \quad (3. \text{ Ableitung}).$$

IV. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung*: U.a. durch Exponieren ($e^{(\cdot)}$) lösen wir auf:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \pm 1 \Leftrightarrow x+1 = \pm(x-1) \Leftrightarrow x+1 = -(x-1), x+1 = x-1 \Leftrightarrow x+1 = -x+1, x+1 = x-1 \Leftrightarrow 2x = 0, 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Damit haben wir die Nullstelle: $N(0|0)$.

V. Hoch-, Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x+1 = x-1 \Leftrightarrow 1 = -1$$

Es gibt mithin keine Extremstellen von $f(x)$.

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \pm(x-1) = x+1,$$

was wieder (s. IV.) auf: $x = 0$ führt. *Hinreichende Bedingung*: Einsetzen von $x = 0$ in die 3. Ableitung ergibt:

$$f'''(0) = \frac{2}{1^3} - \frac{2}{(-1)^3} = 4 > 0.$$

Bei $W(0|0)$ ($x=0$ ist ja die Nullstelle der Funktion: $f(0)=0$) liegt somit der einzige Wendepunkt der Funktion vor.

VI. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Polstellen liegen an den Lücken des Definitionsbereichs $x = -1$ bzw. $x = +1$ vor. Dabei gilt:

$$\underline{x=-1}: x \rightarrow -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow -\infty.$$

D.h.: Bei $x = -1$ liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.

Entsprechend gilt:

$$\underline{x=1}: x \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow +\infty.$$

D.h.: Bei $x = 1$ liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.

VII. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten $f(x)$ für betragsmäßig große x , also:

$$\underline{x \rightarrow \pm\infty} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1 \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow 1 \Rightarrow f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow \ln(1) = 0 = y$$

mit $y = 0$ (x -Achse) als waagerechter Asymptote.

VIII. Für die Funktion $f(x)$ gilt Punktsymmetrie wegen der folgenden auch auf den Logarithmengesetzen (hier: $\ln(1/u) = -\ln(u)$) beruhenden Überlegungen:

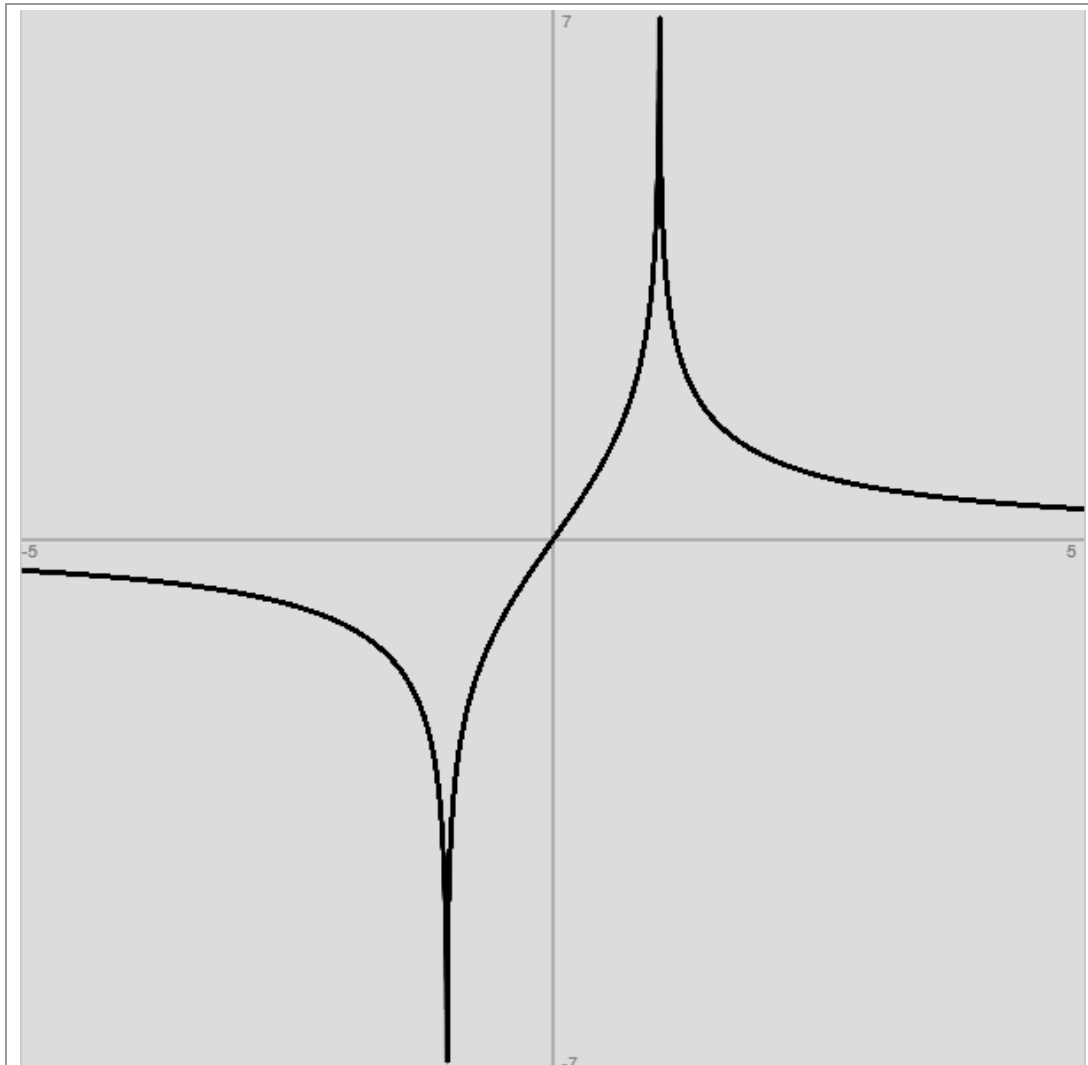
$$f(-x) = \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right| = \ln \left| \frac{-(x-1)}{-(x+1)} \right| = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = -f(x).$$

IX. Wertebereich: Auf Grund des Verhaltens der Funktion $f(x)$ an den Polstellen ($x \rightarrow 1$: $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -1$: $f(x) \rightarrow -\infty$) und bzgl. der waagerechten Asymptote ($x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow 0$) und unter Berücksichtigung

des Wendepunktes $W(0|0)$ umfasst der Wertebereich alle reelle Zahlen: $W_f = \mathbf{R}$.

X. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	-Infinity	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
0	0	2	0	Wendepunkt $W(0 0)$ = Schnittpunkt $S_y(0 0)$
1	Infinity	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1



www.michael-buhlmann.de / 01.2018 / Aufgabe 546