

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Extrempunkte, senkrechte und schiefe Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion	
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x - x_{N1})^{k_1} (x - x_{N2})^{k_2} \dots \cdot R_1(x)}{b_m (x - x_{P1})^{kl} (x - x_{P2})^{k_l} \dots \cdot R_2(x)}$	
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen:	
a) Nenner = 0 $\rightarrow b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0 \rightarrow x_{P1}, x_{P2}, \dots \rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{x_{P1}, x_{P2}, \dots\}$ (Definitionsbereich)	
b) Zähler = 0 $\rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \rightarrow x_{N1}, x_{N2}, \dots$	
c) Auswertung:	
<ul style="list-style-type: none"> - Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm $f(x)$ um den Faktor $(x - x_P)^l = (x - x_N)^k$ ($l=k$) zu $f^*(x)$ gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor. - Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, \dots senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x - x_P)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_P, x > x_P$) oder mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_P, x > x_P$)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_P, x > x_P$) oder mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_P, x > x_P$)). - Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, \dots Nullstellen mit Linearfaktor $(x - x_P)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt). 	
II. Waagerechte Asymptote: Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt:	
$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$	$\left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow 0 & \text{falls } n < m \\ \rightarrow \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \rightarrow \pm\infty & \text{falls } n > m \end{array} \right.$
Im Fall $n > m$ ergibt sich (eventuell nach Polynomdivision) eine Grenzkurve $y = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \dots$; die Näherungskurve ist eine schiefe Asymptote (Gerade) $y = mx + c$, wenn $n = m + 1$ gilt.	
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm $f(x)$ zu $f^*(x)$ kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)	
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen):	
a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$; ...	
V. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen):	
a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$; ...	
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt:	
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$	

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
<p>VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), $f'(x_0) < 0$); - Monotonieintervall (x_1, x_2): $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) > 0$); ... - Monotonieintervall (x_n, ∞): $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) > 0$)
<p>VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f''(x_0) > 0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f''(x_0) > 0$); - Krümmungsintervall (x_1, x_2): $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) > 0$); ... - Krümmungsintervall (x_n, ∞): $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) > 0$); ...
<p>VIII. Symmetrie:</p> <p>a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): $f(-x) = f(x)$ oder: Zähler gerade, Nenner gerade $\rightarrow f(x)$ gerade Zähler ungerade, Nenner ungerade $\rightarrow f(x)$ gerade</p> <p>b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): $f(-x) = -f(x)$ oder: Zähler gerade, Nenner ungerade $\rightarrow f(x)$ ungerade Zähler ungerade, Nenner gerade $\rightarrow f(x)$ ungerade</p> <p>c) $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw. $f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.</p>

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

II. Umformen der Funktionsvorschrift: Die gebrochen rationale Funktion $f(x)$ kann wie folgt umgeformt werden:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}.$$

Wir werden im Folgenden die beiden Darstellungen des Funktionsterms $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ bzw.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} \text{ benutzen.}$$

III. Nullstellen: Wir setzen den Zähler der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ gleich 0 und erhalten sofort:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

und somit keine Nullstellen der Funktion.

IV. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Wir setzen den Nenner der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ gleich

0 und haben:

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Wegen der Vielfachheit 1 des Linearfaktors x im Nenner des Funktionsterms liegt an der Stelle $x=0$ eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel vor. Hinsichtlich des Definitionsbereichs der Funktion $f(x)$ gilt dann noch: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

V. Schiefe Asymptote: Wir betrachten $f(x)$ für betragsmäßig große x , also:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x} \rightarrow \pm\infty,$$

da der Grad des Zählerpolynoms um 1 größer ist als der des Nennerpolynoms. Die schiefe Asymptote y , die sich folglich ergibt gemäß der Darstellung der Funktion als $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$, ist die Ursprungsgerade:

$$y = \frac{1}{2}x.$$

VI. Für die Ableitungen benutzen wir den Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$ und erhalten:

$$\text{Funktion: } f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x + 2x^{-1}$$

$$1. \text{ Ableitung: } f'(x) = \frac{1}{2} - 2x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

$$2. \text{ Ableitung: } f''(x) = 4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

$$3. \text{ Ableitung: } f'''(x) = -12x^{-4} = -\frac{12}{x^4}.$$

VII. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

An der Stelle $x=-2$ beträgt der Wert der 2. Ableitung:

$$f''(-2) = \frac{4}{(-2)^3} = -\frac{1}{2} < 0,$$

so dass wegen $f(-2) = -1-1 = -2$ ein Hochpunkt $H(-2|-2)$ vorliegt. An der Stelle $x=2$ gilt:

$$f''(2) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} > 0$$

mit $f(2) = 1+1 = 2$ und dem Tiefpunkt $T(2|2)$.

VII. Wendepunkte existieren nicht wegen:

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \neq 0$$

für alle $x \in D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

VIII. Wegen der senkrechten Asymptote bzw. Polstelle bei $x=0$ ergeben sich auf der Grundlage der Extrempunkte von $f(x)$ die Monotonieintervalle mit der Monotonie:

$(-\infty; -2)$: $f(x)$ ist monoton steigend (Hochpunkt $H(-2|-2)$)

$(-2; 0)$: $f(x)$ ist monoton fallend (Hochpunkt $H(-2|-2)$, Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x=0$)

$(0; 2)$: $f(x)$ ist monoton fallend (Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x=0$, Tiefpunkt $T(2|2)$)

$(2; \infty)$: $f(x)$ ist monoton steigend (Tiefpunkt $T(2|2)$).

IX. Wegen der senkrechten Asymptote bzw. Polstelle bei $x=0$ liegen folgende Krümmungsintervalle und Krümmungseigenschaften von $f(x)$ vor:

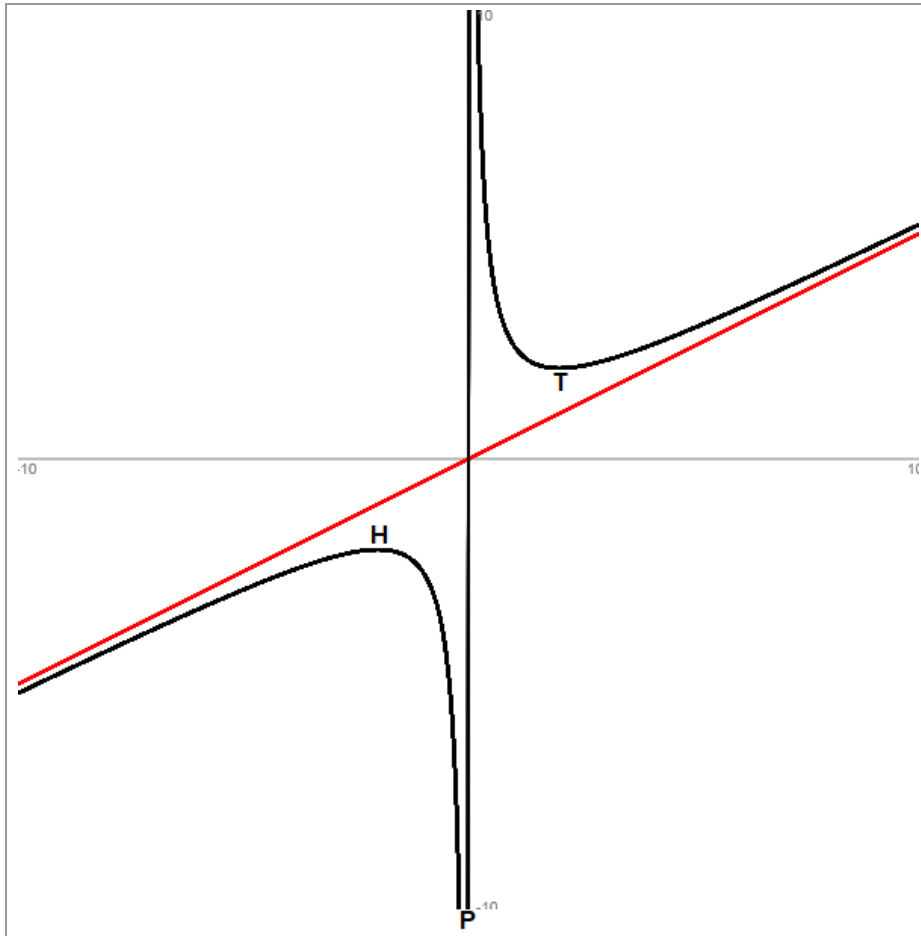
$(-\infty; 0)$: $f(x)$ ist rechts gekrümmt (Hochpunkt $H(-2|-2)$, Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x=0$)

$(0; \infty)$: $f(x)$ ist links gekrümmt (Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x=0$, Tiefpunkt $T(2|2)$).

X. Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ besitzt zudem Punktsymmetrie zum Ursprung $O(0|0)$ des Koordinatensystems, da der Zähler $y = x^2+4$ eine zur y -Achse achsensymmetrische, der Nenner $y = 2x$ eine zum Koordinatenursprung punktsymmetrische Teilfunktion darstellt.

XI. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	-2	0	-0.5	Hochpunkt H(-2 -2)
0	$\pm\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
2	2	0	0.5	Tiefpunkt T(2 2)



www.michael-buhlmann.de / 05.2019 / Aufgabe 856