

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Extrempunkte, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion	
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x - x_{N1})^{k_1} (x - x_{N2})^{k_2} \dots \cdot R_1(x)}{b_m (x - x_{P1})^{k_l} (x - x_{P2})^{k_j} \dots \cdot R_2(x)}$	
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen:	
a) Nenner = 0 $\rightarrow b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0 \rightarrow x_{P1}, x_{P2}, \dots \rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{x_{P1}, x_{P2}, \dots\}$ (Definitionsbereich)	
b) Zähler = 0 $\rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \rightarrow x_{N1}, x_{N2}, \dots$	
c) Auswertung:	
<ul style="list-style-type: none"> - Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm $f(x)$ um den Faktor $(x-x_P)^l = (x-x_N)^k$ ($l=k$) zu $f^*(x)$ gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor. - Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, \dots senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_P)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$) oder mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$) oder mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$)). - Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, \dots Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_P)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt). 	
II. Waagerechte Asymptote: Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt:	
$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$	$\left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow 0 & \text{falls } n < m \\ \rightarrow \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \rightarrow \pm\infty & \text{falls } n > m \end{array} \right.$
Im Fall $n > m$ ergibt sich (eventuell nach Polynomdivision) eine Grenzkurve $y = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \dots$; die Näherungskurve ist eine schiefe Asymptote (Gerade) $y = mx + c$, wenn $n = m + 1$ gilt.	
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm $f(x)$ zu $f^*(x)$ kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)	
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen):	
a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$; ...	
V. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen):	
a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$; ...	
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$	

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
<p>VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):</p> <ul style="list-style-type: none"> – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), $f'(x_0) < 0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) > 0$); ... – Monotonieintervall (x_n, ∞): $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) > 0$)
<p>VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):</p> <ul style="list-style-type: none"> – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f''(x_0) > 0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f''(x_0) > 0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) > 0$); ... – Krümmungsintervall (x_n, ∞): $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) > 0$); ...
<p>VIII. Symmetrie:</p> <p>a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): $f(-x) = f(x)$ oder: Zähler gerade, Nenner gerade $\rightarrow f(x)$ gerade Zähler ungerade, Nenner ungerade $\rightarrow f(x)$ gerade</p> <p>b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): $f(-x) = -f(x)$ oder: Zähler gerade, Nenner ungerade $\rightarrow f(x)$ ungerade Zähler ungerade, Nenner gerade $\rightarrow f(x)$ ungerade</p> <p>c) $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw. $f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.</p>

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

II. Umformen der Funktionsvorschrift: Die gebrochen rationale Funktion $f(x)$ kann dank der 3. binomischen Formel noch wie folgt umgeformt werden:

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9} = \frac{3x^2}{(x-3)(x+3)},$$

so dass der Bruch als in Linearfaktoren zerlegt erscheint.

III. Die Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9}$ besitzt zudem Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems, da der Zähler $y = 3x^2$ eine zur y-Achse achsensymmetrische Teilfunktion darstellt wie der Nenner $y = x^2 - 9$ auch; der Quotient von achsensymmetrischen Funktionen ist achsensymmetrisch.

IV. Nullstellen: Wir setzen den Zähler der Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9}$ gleich Null und erhalten sofort:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{x^2 - 9} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

und somit die doppelte (zweifache) Nullstelle $N(0|0)$ der Funktion.

V. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Wir setzen den Nenner der Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9}$ gleich

Null und haben (auch laut II.):

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0, x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -3$$

Wegen der Vielfachheit 1 der Linearfaktoren im Nenner $(x-3)(x+3)$ des Funktionsterms liegen an den Stellen $x = \pm 3$ senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel vor. Hinsichtlich des Definitionsbereichs der Funktion $f(x)$ gilt dann noch: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3; 3\}$.

VI. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten $f(x)$ für betragsmäßig große x , also:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9} = \frac{3 \cdot x^2}{1 \cdot x^2 - 9} \rightarrow \frac{3}{1} = 3 = y \text{ als waagerechte Asymptote,}$$

da die Grade von Zähler- und Nennerpolynom jeweils 2 und somit gleich sind und die Asymptote sich daher als Quotient der Koeffizienten der jeweils höchsten Potenzen in Zähler und Nenner errechnet.

VII. Die Ermittlung der Nullstellen (und deren Vielfachheit) und der senkrechten Asymptoten (mit oder ohne Vorzeichenwechsel) sowie der waagerechten Asymptote genügt im Wesentlichen, um den Funktionsverlauf von $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9}$ im x - y -Koordinatensystem (siehe XI.) zu erkennen und den Graphen der Funktion zu skizzieren. Das Nachfolgende dient – unter Einsatz der Differentialrechnung – der weiteren Konkretisierung des bisher Erkannten.

VIII. Für die Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 9} = 3x^2 \cdot (x^2 - 9)^{-1}$ gilt (nach Produkt- oder Quotientenregel, Potenz- und Faktorregel):

$$1. \text{ Ableitung: } f'(x) = \frac{6x(x^2 - 9) - 3x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{6x^3 - 54x - 6x^3}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-54x}{(x^2 - 9)^2} = -54x(x^2 - 9)^{-2}$$

$$2. \text{ Ableitung: } f''(x) = \frac{-54(x^2 - 9)^2 + 54x \cdot 2(x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{-54(x^2 - 9) + 216x^2}{(x^2 - 9)^3} = \frac{162x^2 + 486}{(x^2 - 9)^3}.$$

Auf die Bildung der 3. Ableitung wird verzichtet, da die Funktion keine Wendepunkte besitzt (siehe X.).

IX. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-54x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \Leftrightarrow -54x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

An der Stelle $x = 0$ beträgt der Wert der 2. Ableitung:

$$f''(0) = \frac{486}{(-9)^3} = -\frac{486}{729} = -\frac{2}{3} < 0,$$

so dass wegen $f(0) = \frac{3 \cdot 0^2}{0^2 - 9} = 0$ der Hochpunkt $H(0|0)$ als doppelte Nullstelle $N(0|0)$ (siehe IV.) vorliegt.

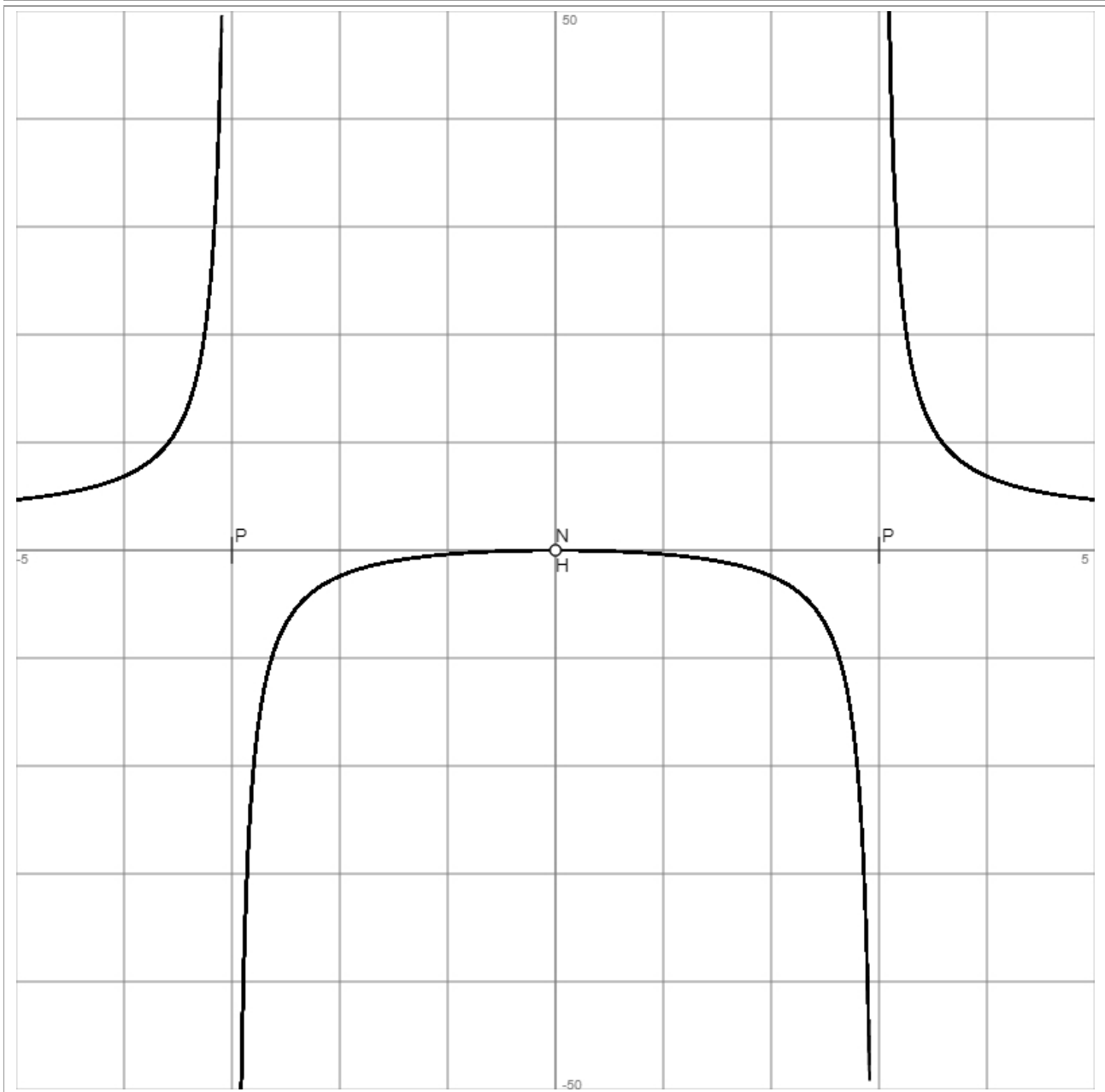
X. Wendepunkte existieren nicht wegen: $f''(x) = \frac{162x^2 + 486}{(x^2 - 9)^3} \neq 0$ (Zähler ungleich Null) für alle $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

XI. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	4.6875	1.05	1.11	
-4.5	5.4	1.92	2.65	
-4	6.8571	4.41	8.97	
-3.5	11.3077	17.89	71.97	
-3	Infinity	- Infinity	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -3$
-2.5	-6.8182	17.85	-72.06	
-2	-2.4	4.32	-9.07	
-1.5	-1	1.78	-2.77	

-1	-0.375	0.84	-1.27	
-0.5	-0.0857	0.35	-0.79	
0	0	0	-0.67	Nullstelle $N(0 0)$ = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Hochpunkt $H(0 0)$
0.5	-0.0857	-0.35	-0.79	
1	-0.375	-0.84	-1.27	
1.5	-1	-1.78	-2.77	
2	-2.4	-4.32	-9.07	
2.5	-6.8182	-17.85	-72.06	
3	Infinity	Infinity	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 3$
3.5	11.3077	-17.89	71.97	
4	6.8571	-4.41	8.97	
4.5	5.4	-1.92	2.65	
5	4.6875	-1.05	1.11	

Graph



www.michael-buhlmann.de / 12.2019 / Aufgabe 912