**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

---

**Aufgabe**: Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-9}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Extrempunkte, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

**Lösung**: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

| **Zentrale Punkte der Kurvendiskussion** |
|---|
| Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\frac{a_n(x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2}\cdot...\cdot R_1(x)}{b_m(x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l}\cdot...\cdot R_2(x)}$ |
| I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen:<br>a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0=0$ -> $x_{P1}$, $x_{P2}$, … -> $D_f$ = **R**\\{$x_{P1}$, $x_{P2}$, …} (Definitionsbereich)<br>b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ -> $x_{N1}$, $x_{N2}$, …<br>c) Auswertung:<br>– Stimmt eine Nennernullstelle $x_P$ mit einer Zählernullstelle $x_N$ überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei $x_P$ eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei $x_P$ eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor.<br>– Ansonsten liegen bei $x_{P1}$, $x_{P2}$, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote $x_P$ mit f(x)->-∞ (x->$x_P$, x<$x_P$) und f(x)->∞ (x->$x_P$, x>$x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->$x_P$, x<$x_P$) und f(x)->-∞ (x->$x_P$, x>$x_P$)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote $x_P$ mit f(x)->-∞ (x->$x_P$, x<$x_P$) und f(x)->-∞ (x->$x_P$, x>$x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->$x_P$, x<$x_P$) und f(x)->∞ (x->$x_P$, x>$x_P$)).<br>– Ansonsten liegen weiter bei $x_{N1}$, $x_{N2}$, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt). |
| II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt:<br>$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}\ \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n<m \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n=m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n>m \end{cases}$<br>Im Fall n>m ergibt sich (eventuell nach Polynomdivision) eine Grenzkurve y = $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+...$; die Näherungskurve ist eine schiefe Asymptote (Gerade) y = mx+c, wenn n=m+1 gilt. |
| III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz $x^n$ und Anwendung der Potenzregel) |
| IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen):<br>a) f'(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, …<br>b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; … |
| V. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen):<br>a) f''(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, …<br>b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; … |
| Va. Sattelpunkte $x_0$ liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt:<br>$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$ |

**Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen**

| **Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion** |
| --- |
| VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):<br>– Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend ($x_1$ als Hochpunkt, $x_1$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_1$, $x<x_1$), $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend ($x_1$ als Tiefpunkt, $x_1$ als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ ($x\to x_1$, $x>x_1$), $f'(x_0)<0$);<br>– Monotonieintervall $(x_1, x_2)$: f(x) monoton fallend ($x_1$ als Hochpunkt, $x_2$ als Tiefpunkt, $x_1$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_1$, $x>x_1$), $x_2$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend ($x_1$ als Tiefpunkt, $x_2$ als Hochpunkt, $x_2$ als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ ($x\to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)>0$); …<br>– Monotonieintervall $(x_n, \infty)$: f(x) monoton fallend ($x_n$ als Hochpunkt, $x_n$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend ($x_n$ als Tiefpunkt, $x_n$ als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ ($x\to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)>0$) |
| VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):<br>– Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $x_1$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_1$, $x<x_1$), $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $x_1$ als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ ($x\to x_1$, $x<x_1$), $f''(x_0)>0$);<br>– Krümmungsintervall $(x_1, x_2)$: f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $x_1$ als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ ($x\to x_1$, $x>x_1$), $x_2$ als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ ($x\to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $x_1$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_1$, $x>x_1$), $x_2$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)>0$); …<br>– Krümmungsintervall $(x_n, \infty)$: f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $x_n$ als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ ($x\to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $x_n$ als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ ($x\to x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)>0$); … |
| VIII. Symmetrie:<br>a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): f(-x) = f(x) oder:<br>Zähler gerade, Nenner gerade -> f(x) gerade<br>Zähler ungerade, Nenner ungerade -> f(x) gerade<br>b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): f(-x) = -f(x) oder:<br>Zähler gerade, Nenner ungerade -> f(x) ungerade<br>Zähler ungerade, Nenner gerade -> f(x) ungerade<br>c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.<br>f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw. |

**Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen**

II. Umformen der Funktionsvorschrift: Die gebrochen rationale Funktion f(x) kann dank der 3. binomischen Formel noch wie folgt umgeformt werden:

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2-9} = \frac{3x^2}{(x-3)(x+3)},$$

so dass der Bruch als in Linearfaktoren zerlegt erscheint.

III. Die Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-9}$ besitzt zudem Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems, da der Zähler $y = 3x^2$ eine zur y-Achse achsensymmetrische Teilfunktion darstellt wie der Nenner $y = x^2-9$ auch; der Quotient von achsensymmetrischen Funktionen ist achsensymmetrisch.

IV. Nullstellen: Wir setzen den Zähler der Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-9}$ gleich Null und erhalten sofort:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{x^2-9} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

und somit die doppelte (zweifache) Nullstelle N(0|0) der Funktion.

V. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Wir setzen den Nenner der Funktion $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-9}$ gleich Null und haben (auch laut II.):

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0,\ x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3,\ x = -3$$

Wegen der Vielfachheit 1 der Linearfaktoren im Nenner (x-3)(x+3) des Funktionsterms liegen an den Stellen $x = \pm 3$ senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel vor. Hinsichtlich des Definitionsbereichs der Funktion f(x) gilt dann noch: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-3; 3\}$.

VI. Waagerechte Asymptote: Wir betrachten f(x) für betragsmäßig große x, also:

x->±∞ => $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-9}=\frac{3\cdot x^2}{1\cdot x^2-9}$ -> $\frac{3}{1}$ = 3 = y als waagerechte Asymptote,

da die Grade von Zähler- und Nennerpolynom jeweils 2 und somit gleich sind und die Asymptote sich daher als Quotient der Koeffizienten der jeweils höchsten Potenzen in Zähler und Nenner errechnet.

VII. Die Ermittlung der Nullstellen (und deren Vielfachheit) und der senkrechten Asymptoten (mit oder ohne Vorzeichenwechsel) sowie der waagerechten Asymptote genügt im Wesentlichen, um den Funktionsverlauf von $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-9}$ im x-y-Koordinatensystem (siehe XI.) zu erkennen und den Graphen der Funktion zu skizzieren. Das Nachfolgende dient – unter Einsatz der Differentialrechnung – der weiteren Konkretisierung des bisher Erkannten.

VIII. Für die Ableitungen der Funktion $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-9}=3x^2\cdot(x^2-9)^{-1}$ gilt (nach Produkt- oder Quotientenregel, Potenz- und Faktorregel):

1. Ableitung: $f'(x)=\frac{6x(x^2-9)-3x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{6x^3-54x-6x^3}{(x^2-9)^2}=\frac{-54x}{(x^2-9)^2}=-54x(x^2-9)^{-2}$

2. Ableitung: $f''(x)=\frac{-54(x^2-9)^2+54x\cdot 2(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-9)^4}=\frac{-54(x^2-9)+216x^2}{(x^2-9)^3}=\frac{162x^2+486}{(x^2-9)^3}$.

Auf die Bildung der 3. Ableitung wird verzichtet, da die Funktion keine Wendepunkte besitzt (siehe X.).

IX. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-54x}{(x^2-9)^2}=0\Leftrightarrow -54x=0\Leftrightarrow x=0.$$

An der Stelle x =0 beträgt der Wert der 2. Ableitung:

$f''(0)=\frac{486}{(-9)^3}=-\frac{486}{729}=-\frac{2}{3}$ < 0,

so dass wegen $f(0)=\frac{3\cdot 0^2}{0^2-9}=0$ der Hochpunkt H(0|-0) als doppelte Nullstelle N(0|0) (siehe IV.) vorliegt.

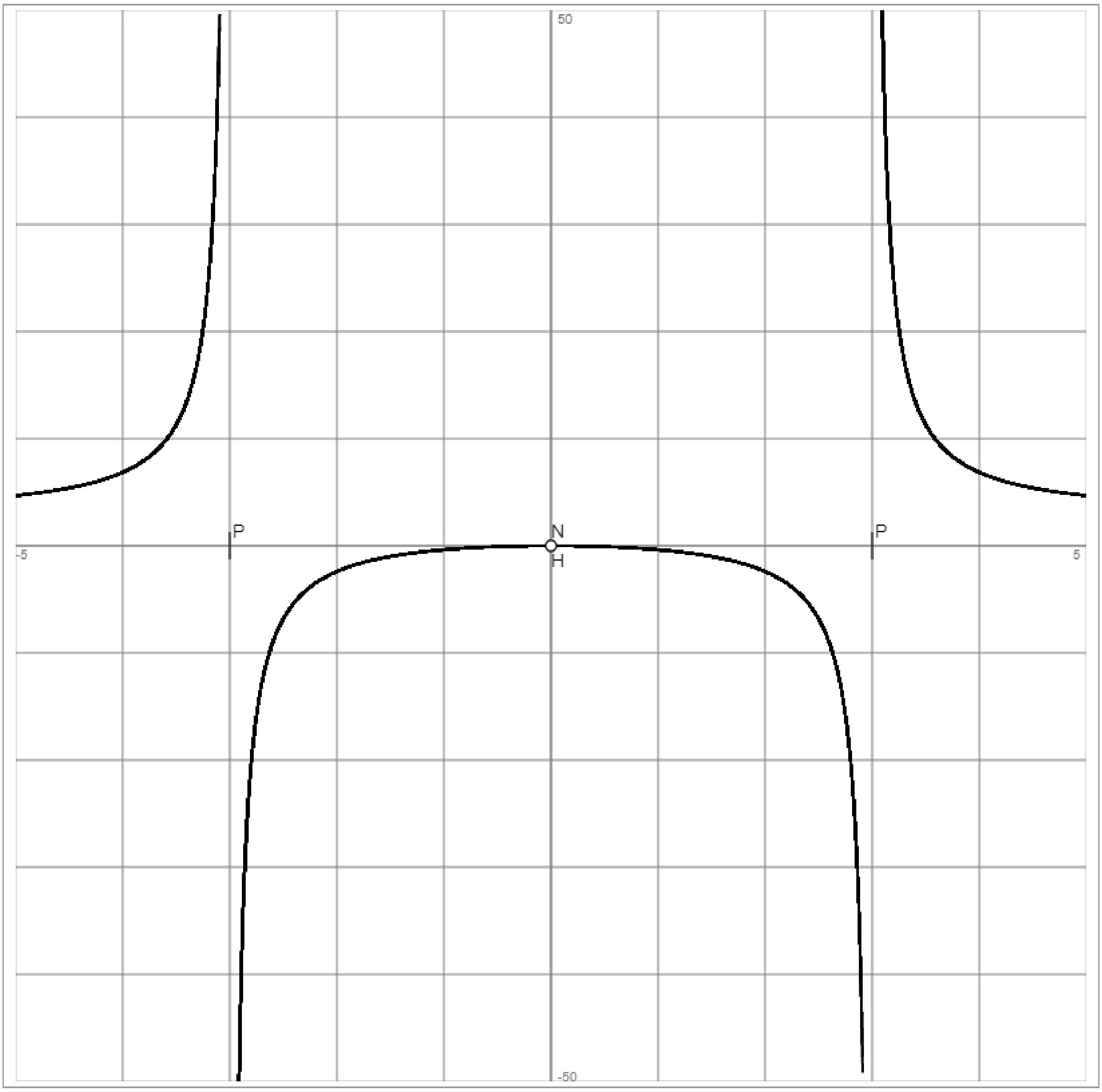
X. Wendepunkte existieren nicht wegen: $f''(x)=\frac{162x^2+486}{(x^2-9)^3}\neq 0$ (Zähler ungleich Null) für alle $x\varepsilon D_f$ = **R**\{-3; 3}.

XI. Wertetabelle, Zeichnung:

| Wertetabelle: | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | **f(x)** | **f'(x)** | **f''(x)** | **Besondere Kurvenpunkte** |
| -5 | 4.6875 | 1.05 | 1.11 | |
| -4.5 | 5.4 | 1.92 | 2.65 | |
| -4 | 6.8571 | 4.41 | 8.97 | |
| -3.5 | 11.3077 | 17.89 | 71.97 | |
| -3 | Infinity | - Infinity | -Infinity | Senkrechte Asymptote/Pol x = -3 |
| -2.5 | -6.8182 | 17.85 | -72.06 | |
| -2 | -2.4 | 4.32 | -9.07 | |
| -1.5 | -1 | 1.78 | -2.77 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -0.375 | 0.84 | -1.27 | |
| -0.5 | -0.0857 | 0.35 | -0.79 | |
| 0 | 0 | 0 | -0.67 | Nullstelle N(0\|0) = Schnittpunkt $S_y$(0\|0) = Hochpunkt H(0\|0) |
| 0.5 | -0.0857 | -0.35 | -0.79 | |
| 1 | -0.375 | -0.84 | -1.27 | |
| 1.5 | -1 | -1.78 | -2.77 | |
| 2 | -2.4 | -4.32 | -9.07 | |
| 2.5 | -6.8182 | -17.85 | -72.06 | |
| 3 | Infinity | Infinity | -Infinity | Senkrechte Asymptote/Pol x = 3 |
| 3.5 | 11.3077 | -17.89 | 71.97 | |
| 4 | 6.8571 | -4.41 | 8.97 | |
| 4.5 | 5.4 | -1.92 | 2.65 | |
| 5 | 4.6875 | -1.05 | 1.11 | |

**Graph**




www.michael-buhlmann.de / 12.2019 / Aufgabe 912