Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion mit exponentiellem und quadratischem Anteil:

$$f(x) = \frac{4x^2}{e^{0,5x}} .$$

Untersuche die Funktion auf: Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen. Zeichne auf dieser Grundlage und unter Verwendung einer geeigneten Wertetabelle den Graphen der Funktion in ein x-y-Koordinatensystem ein.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer (für jede reelle Zahl x definierten) Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: f(x), D_f = **R**
I. Ableitungen (etwa nach Produkt- bzw. Quotientenregel, Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): f'(x) (1. Ableitung) f''(x) (2. Ableitung) f'''(x) (3. Ableitung)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion auf ganz R mehrfach differenzierbarer Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit x_1 < x_2 < … < x_n, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0)
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit x_1 < x_2 < … < x_n, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0)

VII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade) c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw. f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
VIII. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞): x->∞: f(x) -> c_1 mit y = c_1 als waagerechter Asymptote oder: x->∞: f(x) -> ±∞ x->-∞: f(x) -> c_2 mit y = c_2 als waagerechter Asymptote (auch mit y = c_1 = c_2) oder: x->-∞: f(x) -> ±∞

II. Eine Umformung der Funktionsvorschrift ergibt mit:

$$f(x) = \frac{4x^2}{e^{0,5x}} = 4x^2 e^{-0,5x}$$

einen einfacher zu berechnenden Funktionsterm.

III. Symmetrie: Die Funktionskurve ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems. Wir sehen nämlich, dass

$$f(-x) = 4(-x)^2 e^{-0,5(-x)} = 4x^2 e^{0,5x} \neq \pm f(x)$$

gilt, was weder mit f(x) (Achsensymmetrie) noch mit -f(x) (Punktsymmetrie) übereinstimmt.

IV. Wir bilden zunächst die Ableitungen hauptsächlich nach der Produktregel und unter Ausklammern des Faktors $e^{-0,5x}$:

u(x) = $4x^2$, u'(x) = 8x, v(x) = $e^{-0,5x}$. v'(x) = -0,5 $e^{-0,5x}$ =>

$$f'(x) = 8xe^{-0,5x} + 4x^2(-0,5e^{-0,5x}) = 8xe^{-0,5x} - 2x^2e^{-0,5x} = (8x - 2x^2)e^{-0,5x}$$

u(x) = 8x-$2x^2$, u'(x) = 8-4x, v(x) = $e^{-0,5x}$. v'(x) = -0,5 $e^{-0,5x}$ =>

$$f''(x) = (8-4x)e^{-0,5x} + (8x-2x^2)(-0,5e^{-0,5x}) = (8-4x)e^{-0,5x} - (4x - x^2)e^{-0,5x} =$$

$$[(8-4x) - (4x - x^2)]e^{-0,5x} = (8 - 8x + x^2)e^{-0,5x}$$

u(x) = 8-8x+x^2, u'(x) = -8+2x, v(x) = $e^{-0,5x}$. v'(x) = -0,5 $e^{-0,5x}$ =>

$$f'''(x) = (-8+2x)e^{-0,5x} + (8-8x+x^2)(-0,5e^{-0,5x}) = (-8+2x)e^{-0,5x} - (4-4x+0,5x^2)e^{-0,5x} =$$

$$[(-8+2x) - (4-4x+0,5x^2)]e^{-0,5x} = (-12+6x-0,5x^2)e^{-0,5x}$$

V. Zur Nullstellenbestimmung rechnen wir:

$$f(x) = \frac{4x^2}{e^{0,5x}} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

womit eine doppelte (zweifache) Nullstelle bei: N(0|0) vorliegt. Die Funktion f(x) ist darüber hinaus nicht negativ, es gilt: f(x) ≥ 0. Damit muss die Nullstelle N(0|0) auch ein Tiefpunkt der Funktion sein, wie wir jetzt sehen werden.

VI. Hoch- und Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung liefert die Stellen, wo die Funktion waagerechte Tangenten besitzt:

$f'(x) = (8x - 2x^2)e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow 8x-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(8-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 8-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 8 = 2x \Leftrightarrow$
x = 0, x = 4

(Division durch $e^{-0,5x}$ > 0, Ausklammern von x, Satz vom Nullprodukt). Die Überprüfung der Stellen x = 0, x = 4 mit Hilfe der 2. Ableitung ergibt:

$f''(0) = (8-0+0)e^0 = 8$ > 0 => Tiefpunkt T(0|0) = N(0|0)

$f''(4) = (8-32+16)e^{-4} = -8e^{-4}$ < 0 => Hochpunkt H(4|64/e^2) (mit: f(4) = 64/e^2).

Mit T(0|0) und H(4|64/e^2) besitzt die Funktion f(x) also einen Tief- und Hochpunkt.

VII. Wendepunkte: Wir setzen die 2. Ableitung Null und erhalten:

$$f''(x) = (8-8x+x^2)e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} =$$

$\frac{8\pm4\sqrt{2}}{2}=4\pm2\sqrt{2} \Leftrightarrow x_1=4-2\sqrt{2}, \; x_2=4+2\sqrt{2}$

(Division durch $e^{-0,5x} > 0$, abc-Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung). Einsetzen der Stellen $x_1=4-2\sqrt{2}\approx 1{,}17$, $x_2=4+2\sqrt{2}\approx 6{,}83$ in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(4-2\sqrt{2})=-4\sqrt{2}e^{-2+2\sqrt{2}} \neq 0$ => Wendepunkt $W_1(4-2\sqrt{2}\,|\,(48-32\sqrt{2})e^{-2+2\sqrt{2}})$

$f'''(4+2\sqrt{2})=4\sqrt{2}e^{-2-2\sqrt{2}} \neq 0$ => Wendepunkt $W_2(4+2\sqrt{2}\,|\,(48+32\sqrt{2})e^{-2-2\sqrt{2}})$,

so dass die Funktion zwei Wendepunkte besitzt.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x: Der exponentielle Anteil bestimmt das Verhalten der Funktion f(x). Aus $e^{-0,5x}$ -> ∞ für x -> -∞ und $e^{-0,5x}$ -> 0 für x -> ∞ ergibt sich:

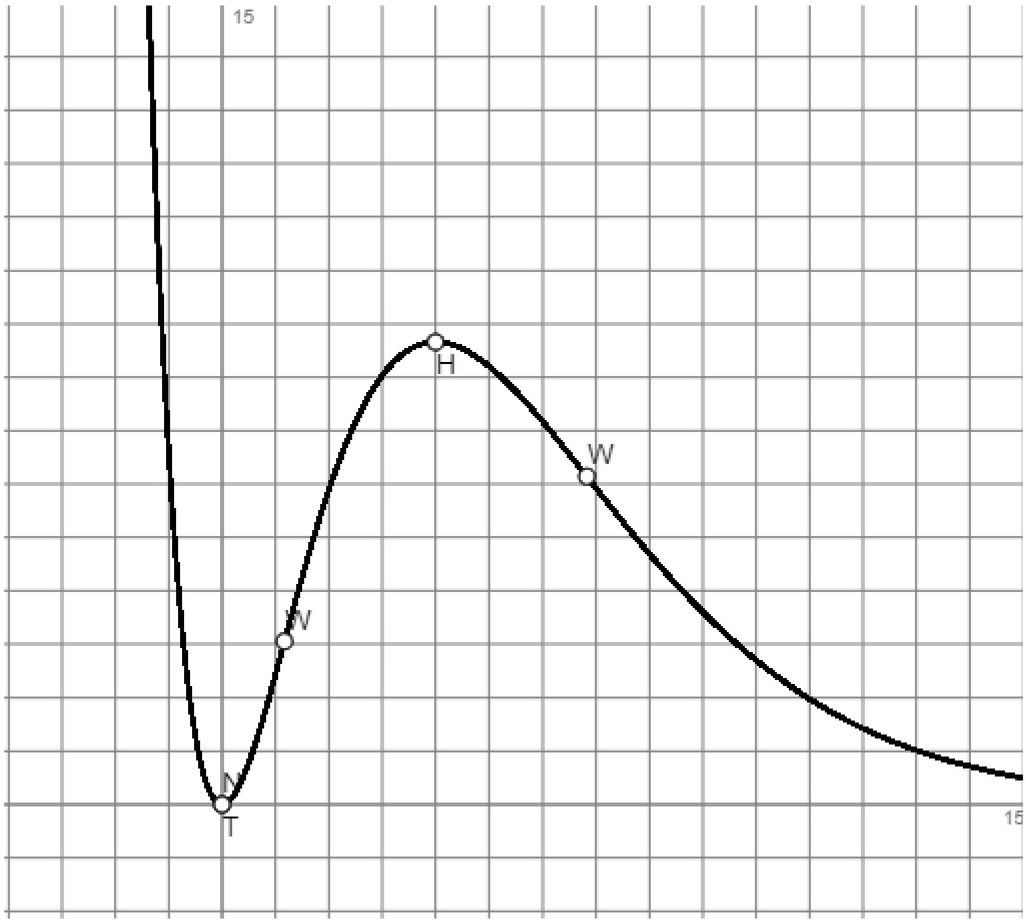
x -> -∞ => f(x) -> ∞
x -> ∞ => f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote und x-Achse des Koordinatensystems.

VIII. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-15	1627238.173	-1030585.79	638239.46	
-14.5	1184216.1773	-755449.45	470659.41	
-14	859760.3962	-552704	346536.35	
-13.5	622608.8379	-403543.42	254723.22	
-13	449635.7439	-293993.09	186904.95	
-12.5	323758.0154	-213680.65	136885	
-12	232374.9851	-154916.92	100050.42	
-11.5	166206.8593	-112009.16	72970.84	
-11	118430.8952	-80748.48	53098.19	
-10.5	84039.7244	-58027.53	38542.06	
-10	59365.2636	-41555.76	27901.7	
-9.5	41725.9267	-29647.42	20140.58	
-9	29165.5505	-21064.05	14492.77	
-8.5	20260.4642	-14897.43	10393.14	
-8	13977.1264	-10482.87	7425.36	
-7.5	9567.2435	-7334.9	5283.25	
-7	6490.6286	-5099.79	3742.05	
-6.5	4358.5674	-3520.39	2637.06	
-6	2892.3173	-2410.27	1847.87	
-5.5	1892.7585	-1634.66	1286.61	
-5	1218.2494	-1096.43	889.32	
-4.5	768.5066	-725.81	609.59	
-4	472.8996	-472.9	413.79	
-3.5	281.9755	-302.12	277.66	
-3	161.3408	-188.23	183.75	
-2.5	87.2586	-113.44	119.54	
-2	43.4925	-65.24	76.11	
-1.5	19.053	-34.93	47.1	
-1	6.5949	-16.49	28.03	
-0.5	1.284	-5.78	15.73	
0	0	0	8	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
0.5	0.7788	2.73	3.31	
1	2.4261	3.64	0.61	
1.17	3.0505	3.69	0	Wendepunkt W(1.17|3.05)
1.5	4.2513	3.54	-0.83	
2	5.8861	2.94	-1.47	
2.5	7.1626	2.15	-1.65	

3	8.0327	1.34	-1.56	
3.5	8.5149	0.61	-1.35	
4	8.6615	0	-1.08	Hochpunkt H(4|8.66)
4.5	8.5373	-0.47	-0.82	
5	8.2085	-0.82	-0.57	
5.5	7.7353	-1.05	-0.37	
6	7.1693	-1.19	-0.2	
6.5	6.5528	-1.26	-0.07	
6.825	6.1409	-1.27	0	Wendepunkt W(6.83|6.14)
7	5.9187	-1.27	0.03	
7.5	5.2915	-1.23	0.1	
8	4.6888	-1.17	0.15	
8.5	4.1224	-1.09	0.17	
9	3.5993	-1	0.19	
9.5	3.1233	-0.9	0.19	
10	2.6952	-0.81	0.19	
10.5	2.3142	-0.72	0.18	
11	1.978	-0.63	0.17	
11.5	1.6837	-0.55	0.15	
12	1.4278	-0.48	0.14	
12.5	1.2065	-0.41	0.12	
13	1.0163	-0.35	0.11	
13.5	0.8536	-0.3	0.1	
14	0.7149	-0.26	0.08	
14.5	0.5973	-0.22	0.07	
15	0.4978	-0.18	0.06	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 12.2019 / Aufgabe 913