Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die gebrochen rationale Betragsfunktion $f(x) = |x| + x - 2 + \frac{2}{|x|}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, senkrechte, waagerechte und schiefe Asymptoten sowie Lücken.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x - x_{N1})^{k_1} (x - x_{N2})^{k_2} \cdot ... \cdot R_1(x)}{b_m (x - x_{P1})^{kl} (x - x_{P2})^{k_l} \cdot ... \cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n < m \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n > m \end{cases}$ Im Fall n>m ergibt sich (eventuell nach Polynomdivision) eine Grenzkurve y = $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + ...$; die Näherungskurve ist eine schiefe Asymptote (Gerade) y = mx+c, wenn n=m+1 gilt.
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘(x) einsetzen): a) f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f‘‘(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f‘‘(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f‘‘(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f‘‘(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
V. Wendepunkte (Gleichung f‘‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘‘(x) einsetzen): a) f‘‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f‘‘‘(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f‘‘‘(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: f‘(x_0) = 0, f‘‘(x_0) = 0, f‘‘‘(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

II. Umformen der Funktionsvorschrift: Die gebrochen rationale Betragsfunktion f(x) kann wie folgt umgeformt werden:

$$f(x) = |x| + x - 2 + \frac{2}{|x|} = \frac{|x|^2}{|x|} + \frac{x|x|}{|x|} - \frac{2|x|}{|x|} + \frac{2}{|x|} = \frac{|x|^2 + x|x| - 2|x| + 2}{|x|} = \frac{x^2 + |x|(x-2) + 2}{|x|} \quad (*)$$

$$f(x) = |x| + x - 2 + \frac{2}{|x|} = \begin{cases} x + x - 2 + \frac{2}{x} = 2x - 2 + \frac{2}{x} & (x > 0) \\ -x + x - 2 + \frac{2}{-x} = -2 - \frac{2}{x} & (x < 0) \end{cases} \quad (**).$$

Gemäß (**) besteht die Funktion von f(x) aus zwei gebrochen rationalen Teilfunktionen. Die Umformungen (*) und (**) bestimmen u.a. die folgenden Vorgehensweisen.

III. Definitionsbereich: Die Funktion $f(x) = |x| + x - 2 + \frac{2}{|x|}$ ist dort nicht definiert, wo der Nenner des Bruchs verschwindet, also (s. II.) bei x = 0. Der Definitionsbereich ist daher: D_f = **R**\{0}. An der Definitionslücke können dann (s. V.) Polstellen (senkrechte Asymptoten) oder Funktionslücken auftreten.

IV. Nullstelle: Für die Bestimmung eventueller Nullstellen ist der Zähler des Funktionsterms in (*): $f(x) = \frac{x^2 + |x|(x-2) + 2}{|x|}$ relevant. Der Zählerterm verschwindet, wenn gilt:

$x^2 + |x|(x–2) + 2 = 0$

1. Fall: x>0:

$x^2 + x(x–2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x^2 – 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 – 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 – x +1 = 0 \Leftrightarrow$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ -> keine Lösungen.

2. Fall: x<0:

$x^2 + (-x)(x–2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 – x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

Die einzige Nullstelle von f(x) ist: N(-1|0).

V. Senkrechte Asymptote/Polstelle: Die einzige Polstelle der Funktion lässt sich aus dem Funktionsterm $f(x) = |x| + x - 2 + \frac{2}{|x|}$ erkennen. Denn der Nenners verschwindet, wenn x = 0 ist. Wegen der Beträge in der Funktionsvorschrift liegt gemäß (**)eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.

VI. Waagerechte, schiefe Asymptote: Für große positive x existiert gemäß (**) eine schiefe Asymptote y, da bei $f(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x}$ wegen 2/x -> 0 für x->+∞ gilt:

x->+∞ => f(x) -> 2x – 2 = y,

so dass die Gerade y = 2x – 2 eine schiefe Asymptote zu f(x) ist. Weiter gilt für betragsmäßig große negative x auf Grund von $f(x) = -2 - \frac{2}{x}$ und 2/x -> 0 für x->-∞:

x->-∞ => f(x) -> -2 = y,
so dass die Gerade y = -2 eine waagerechte Asymptote zu f(x) ist. Die beiden Asymptoten schneiden sich im Übrigen im Punkt P(0|-2).

VII. <u>Ableitungen</u>: Die ersten drei Ableitungen zu $f(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x} = 2x - 2 + 2x^{-1}$, x>0, lauten nach der Potenzregel für das Ableiten:

$$f'(x) = 2 + 2(-1)x^{-2} = 2 - 2x^{-2} = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$f''(x) = -2(-2)x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

$$f'''(x) = 4(-3)x^{-4} = -12x^{-4} = -\frac{12}{x^4},$$

zu $f(x) = -2 - \frac{2}{x} = -2 - 2x^{-1}$, x<0:

$$f'(x) = -2(-1)x^{-2} = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$$

$$f''(x) = 2(-2)x^{-3} = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$$

$$f'''(x) = -4(-3)x^{-4} = 12x^{-4} = \frac{12}{x^4}.$$

VIII. <u>Extrempunkte</u>: Wir setzen die 1. Ableitung gleich Null und erhalten für x>0:

$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = 0$ ⇔ $2x^2 - 2 = 0$ ⇔ $2x^2 = 2$ ⇔ $x^2 = 1$ ⇔ $x = \pm 1$,

wobei wegen x>0 nur x =1 eine Stelle mit waagerechter Tangente ist. Einsetzen von x = 1 in die 2. Ableitung ergibt dann:

$$f''(1) = \frac{4}{1^3} = 4 > 0$$

und damit einen Tiefpunkt von f(x) mit f(1) = 2: T(1|2). Nullsetzen der 1. Ableitung für x<0 führt auf:

$f'(x) = \frac{2}{x^2} = 0$ ⇔ 2 = 0,

also zu keiner Lösung, so dass einzig der Tiefpunkt als Extrempunkt der Funktion erkannt wurde.

IX. <u>Wendepunkte</u>: Auch hier unterscheiden wir die Fälle x>0 und x<0 und haben mit dem Nullsetzen der jeweiligen 2. Ableitung:

x>0: $f''(x) = \frac{4}{x^3} = 0$ ⇔ 4 = 0

x<0: $f''(x) = -\frac{4}{x^3} = 0$ ⇔ -4 = 0 jeweils keine Lösungen. Wendepunkte von f(x) existieren also nicht.

X. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	-1.8	0.02	0	
-9.5	-1.7895	0.02	0	
-9	-1.7778	0.02	0.01	
-8.5	-1.7647	0.03	0.01	
-8	-1.75	0.03	0.01	
-7.5	-1.7333	0.04	0.01	
-7	-1.7143	0.04	0.01	
-6.5	-1.6923	0.05	0.01	
-6	-1.6667	0.06	0.02	
-5.5	-1.6364	0.07	0.02	
-5	-1.6	0.08	0.03	
-4.5	-1.5556	0.1	0.04	
-4	-1.5	0.13	0.06	
-3.5	-1.4286	0.16	0.09	
-3	-1.3333	0.22	0.15	
-2.5	-1.2	0.32	0.26	
-2	-1	0.5	0.5	
-1.5	-0.6667	0.89	1.19	
-1	0	2	4	Nullstelle N(-1|0)
-0.5	2	8	32	
0	Infinity	1	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	3	-6	32	
1	2	0	4	Tiefpunkt T(1|2)
1.5	2.3333	1.11	1.19	
2	3	1.5	0.5	
2.5	3.8	1.68	0.26	
3	4.6667	1.78	0.15	
3.5	5.5714	1.84	0.09	
4	6.5	1.87	0.06	
4.5	7.4444	1.9	0.04	
5	8.4	1.92	0.03	
5.5	9.3636	1.93	0.02	
6	10.3333	1.94	0.02	
6.5	11.3077	1.95	0.01	
7	12.2857	1.96	0.01	
7.5	13.2667	1.96	0.01	
8	14.25	1.97	0.01	
8.5	15.2353	1.97	0.01	
9	16.2222	1.98	0.01	
9.5	17.2105	1.98	0	
10	18.2	1.98	0	

Graphen (Funktion f(x); waagerechte, schiefe Asymptote y)