Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x^3-2x^2+x}{x^2+3x}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, $x>x_1$: f(x) -> +∞, x->x_1, $x<x_1$: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, $x>x_1$: f(x) -> -∞, x->x_1, $x<x_1$: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, $x>x_2$: f(x) -> +∞, x->x_2, $x<x_2$: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, $x>x_2$: f(x) -> -∞, x->x_2, $x<x_2$: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f‘‘(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f‘‘(x_0)>0)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f‘(x) punktsymmetrisch -> f‘‘(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f‘(x) achsensymmetrisch -> f‘‘(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞):
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

a_n>0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

a_n<0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y	(n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y	(n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞	(n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+…)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+…)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 3x}$ ist gebrochen rational mit <u>Definitionsbereich</u> D_f = **R**\{-3; 0} wegen des Nullsetzen des Nenners: x^2+3x = 0 ⇔ x = -3, x = 0.

III. Die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 3x}$ lässt sich durch Kürzen und Einsatz der binomischen Formel vereinfachen zu:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 3x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3} = \frac{(x-1)^2}{x+3}.$$

IV. <u>Nullstellen</u>: Wir verwenden die vereinfachte Form der Funktionsgleichung:

f(x) = 0 ⇔ $\frac{(x-1)^2}{x+3}$ = 0 ⇔ $(x-1)^2$ = 0 ⇔ x-1 = 0 ⇔ x = 1 mit doppelter Nullstelle bei N(1|0).

V. Polstellen: Nullsetzen des Nenners der vereinfachten Funktionsgleichung führt auf: x = -3 als Polstelle (senkrechte Asymptote) mit Vorzeichenwechsel (wegen $(x+3)^1$).

VI. Lücken: Vergleicht man die Funktionsterme $f(x)=\frac{x^3-2x^2+x}{x^2+3x}$ und $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+3}$, so fällt ein hebbare Lücke bei x = 0 auf. Lückenwert ist:

$$\lim_{x->0} f(x)=\lim_{x->0}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2+3x}=\lim_{x->0}\frac{(x-1)^2}{x+3}=\frac{(0-1)^2}{0+3}=\frac{1}{3},$$

die Lücke L(0|1/3).

VII. Verhalten für x->±∞: Eine Polynomdivision o.ä. ergibt:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+3}=x-5+\frac{16}{x+3}\xrightarrow[x->\pm\infty]{}x-5=y,$$

so dass die Gerade y = x–5 schiefe Asymptote zur Funktion f(x) ist.

VIII. Ableitungen: Die Ableitungen zu $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+3}$ werden nach der Quotientenregel gebildet:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x+3)-(x-1)^2\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+6)(x+3)^2-(x^2+6x-7)\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}=\frac{(2x+6)(x+3)-2(x^2+6x-7)}{(x+3)^3}=\frac{32}{(x+3)^3}.$$

IX.. Extrempunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x+3)-(x-1)^2\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}$$ = 0 ⇔ x^2+6x–7 = 0 ⇔ x = -7, x = 1.

Einsetzen der x-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(-7)=\frac{32}{(-4)^3}=-\frac{1}{2}<0$ => Hochpunkt H(-7|-16)

$f''(1)=\frac{32}{4^3}=\frac{1}{2}>0$ => Tiefpunkt T(1|0).

X. Wendepunkte: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt die Gleichung:

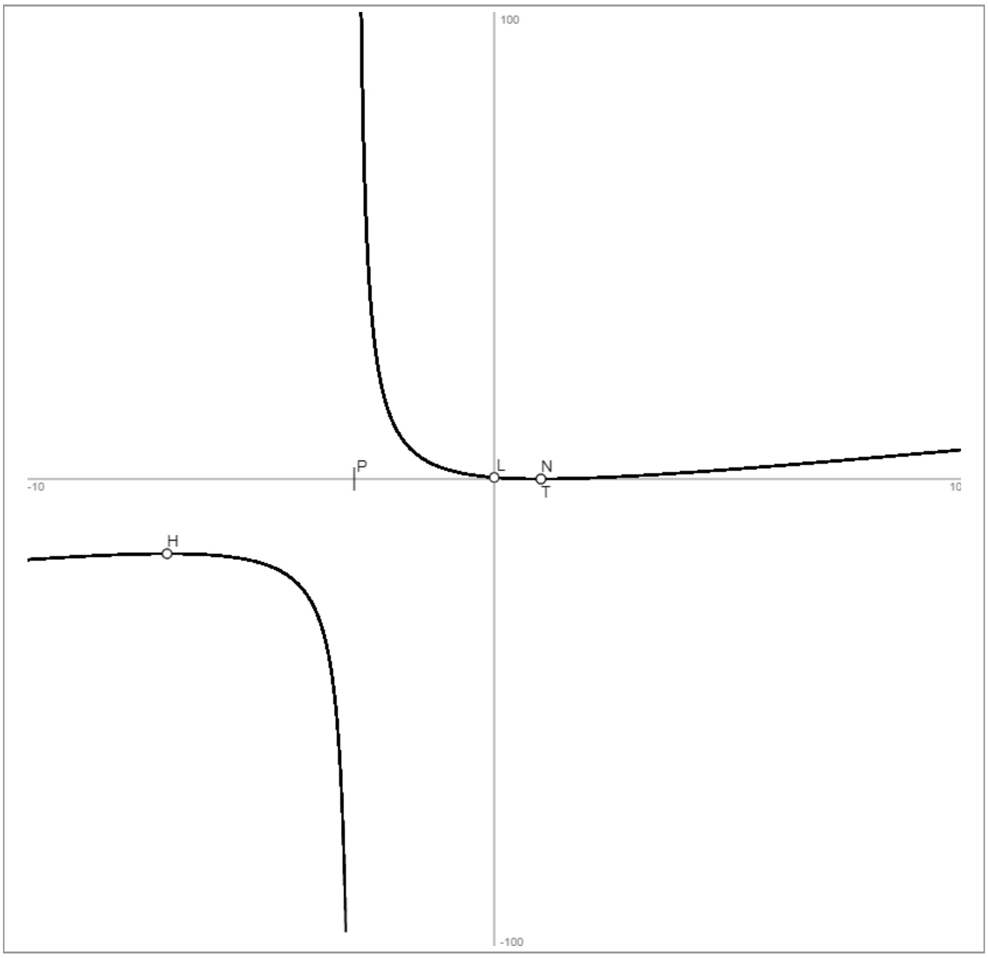
$f''(x)=\frac{32}{(x+3)^3}$ = 0 ⇔ 32 = 0,

also offensichtlich eine falsche Aussage. Wendepunkt besitzt die Funktion f(x) nicht.

XI. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-10	-17.2857	0.67	-0.09	
-9.5	-16.9615	0.62	-0.12	
-9	-16.6667	0.56	-0.15	
-8.5	-16.4091	0.47	-0.19	
-8	-16.2	0.36	-0.26	
-7.5	-16.0556	0.21	-0.35	
-7.005	-16	0	-0.5	Hochpunkt H(-7|-16)
-7	-16	0	-0.5	
-6.5	-16.0714	-0.31	-0.75	
-6	-16.3333	-0.78	-1.19	
-5.5	-16.9	-1.56	-2.05	
-5	-18	-3	-4	
-4.5	-20.1667	-6.11	-9.48	
-4	-25	-15	-32	
-3.5	-40.5	-63.01	-256.03	
-3	Infinity	-Infinity	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -3
-2.5	24.5	-63.01	256.03	
-2	9	-15	32	
-1.5	4.1667	-6.11	9.48	
-1	2	-3	4	
-0.5	0.9	-1.56	2.05	
0	0.3333	-0.78	1.19	Hebbare Lücke L(0|0.33)
0.5	0.0714	-0.31	0.75	
1	0	0	0.5	Nullstelle N(1|0) = Tiefpunkt T(1|0)
1.5	0.0556	0.21	0.35	
2	0.2	0.36	0.26	
2.5	0.4091	0.47	0.19	
3	0.6667	0.56	0.15	
3.5	0.9615	0.62	0.12	
4	1.2857	0.67	0.09	
4.5	1.6333	0.72	0.08	
5	2	0.75	0.06	
5.5	2.3824	0.78	0.05	
6	2.7778	0.8	0.04	
6.5	3.1842	0.82	0.04	
7	3.6	0.84	0.03	
7.5	4.0238	0.85	0.03	
8	4.4545	0.87	0.02	
8.5	4.8913	0.88	0.02	
9	5.3333	0.89	0.02	
9.5	5.78	0.9	0.02	
10	6.2308	0.91	0.01	

Graph: Funktion f(x)



Graph: Funktion f(x), senkrechte Asymptote x = -3, schiefe Asymptote y = x–5