Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x^2-x-x|x+1|}{|x+1|}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung f'(x) = 0 lösen): f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> P_1(x_1|f(x_1)), P_2(x_2|f(x_2)), …
IV. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, x>x_1: f(x) -> +∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, x>x_1: f(x) -> -∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, x>x_2: f(x) -> +∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, x>x_2: f(x) -> -∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.
VIII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade) c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch. d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch. d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion. e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw. f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.
IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞): a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

a_n>0	n ungerade	n gerade	a_n<0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-x-x|x+1|}{|x+1|}$ ist eine gebrochen rationale Funktion mit Betrag; der Definitionsbereich ist: D_f = **R**\{-1}. Die Funktion lässt sich darstellen als:

$$f(x)=\frac{x^2-x-x|x+1|}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-x(x+1)}{x+1}=\dfrac{-2x}{x+1} & (x>-1)\\ \dfrac{x^2-x-x(-(x+1))}{-(x+1)}=-\dfrac{2x^2}{x+1} & (x<-1)\end{cases}$$

III. An der Stelle x = -1 liegt eine Polstelle (senkrechte Asymptote) ohne Vorzeichenwechsel vor.

IV. Für x->±∞ lassen sich die folgenden Asymptoten festmachen:

x->+∞: $f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}->-2$ = y als waagerechte Asymptote,

x->-∞: $f(x)=-\dfrac{2x^2}{x+1}=-2x+2-\dfrac{2}{x+1}->-2x+2$ = y als schiefe Asymptote.

V. Die einzige Nullstelle N(0|0) der Funktion liegt bei x = 0 vor wegen: $f(x) = \frac{-2x}{x+1} = 0$ ⇔ x = 0.

VI. Das einzige Extremum der Funktion ist der Tiefpunkt T(-4|16) wegen:

$f(x) = -\frac{2x^2}{x+1} = -2x + 2 - \frac{2}{x+1}$ => $f'(x) = -2 + \frac{2}{(x+1)^2} = 0$ ⇔ 2 = 2(x+1)^2 ⇔ 1 = (x+1)^2 ⇔

±1 = x+1 ⇔ x = -1±1 ⇔ x = -2, [x = 0]

mit:

$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$ => $f''(-2) = -\frac{4}{(-2+1)^3} = 4 > 0$ => Tiefpunkt an der Stelle x = -2.

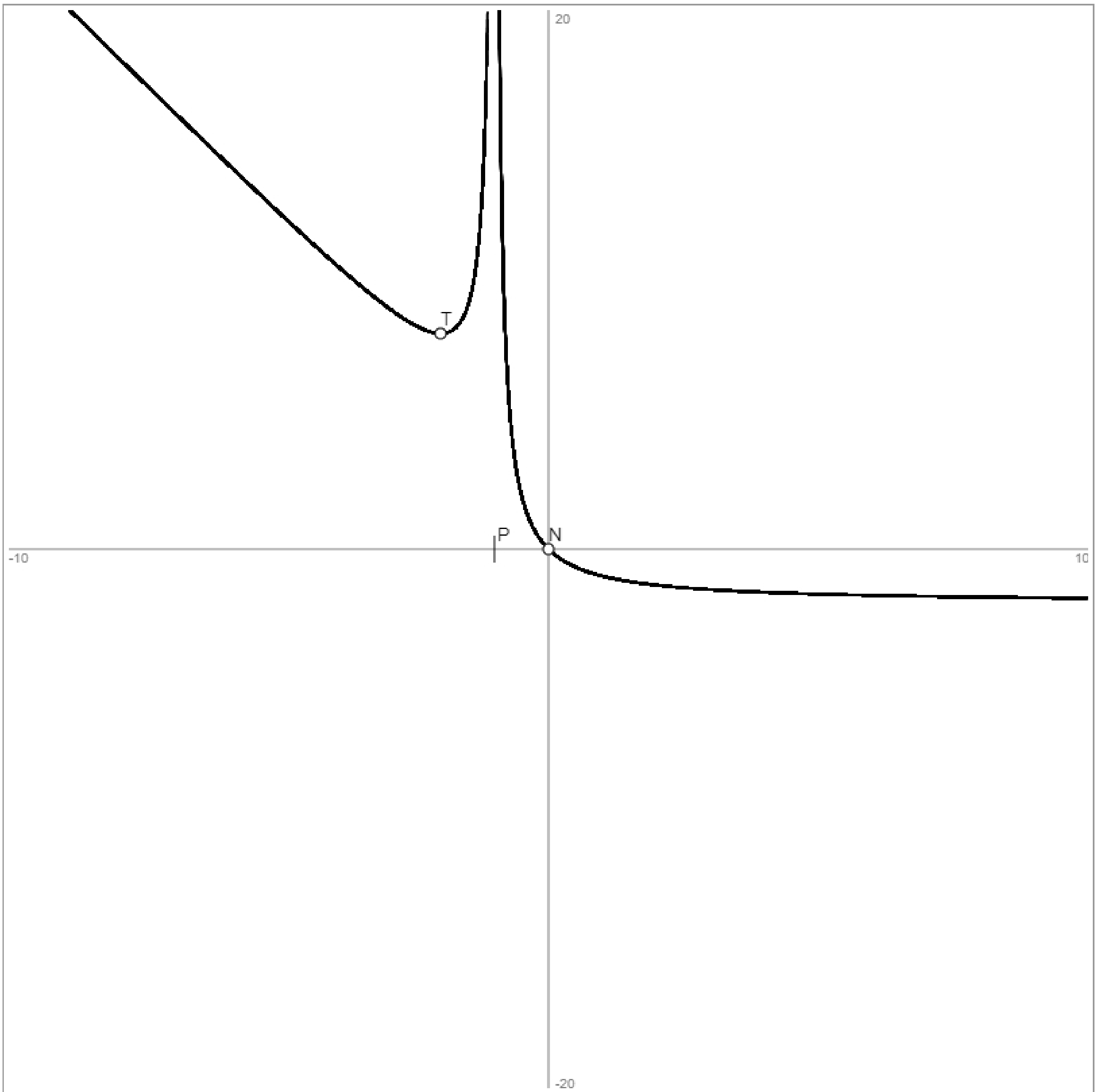
VII. Wendepunkte gibt es keine, da die 2. Ableitungen der beiden Teilfunktionen von f(x) nie verschwinden.

VIII. Wertetabelle, Zeichnung:

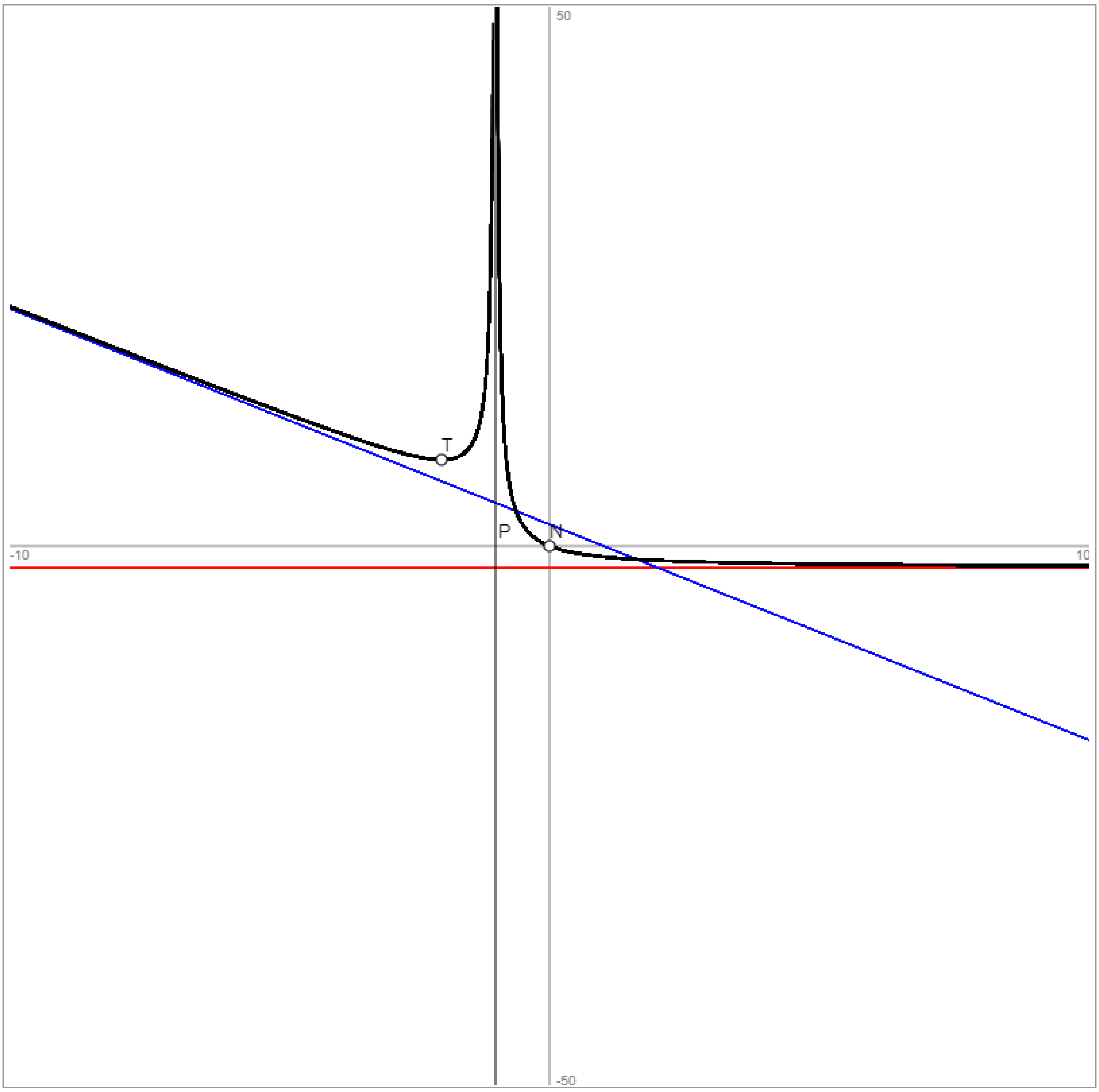
Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	22.2222	-1.98	0.01	
-9.5	21.2353	-1.97	0.01	
-9	20.25	-1.97	0.01	
-8.5	19.2667	-1.96	0.01	
-8	18.2857	-1.96	0.01	
-7.5	17.3077	-1.95	0.01	
-7	16.3333	-1.94	0.02	
-6.5	15.3636	-1.93	0.02	
-6	14.4	-1.92	0.03	
-5.5	13.4444	-1.9	0.04	
-5	12.5	-1.87	0.06	
-4.5	11.5714	-1.84	0.09	
-4	10.6667	-1.78	0.15	
-3.5	9.8	-1.68	0.26	
-3	9	-1.5	0.5	
-2.5	8.3333	-1.11	1.19	
-2	8	0	4	Tiefpunkt T(-2|8)
-1.5	9	6	32	
-1	Infinity	-Infinity	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
-0.5	2	-8	32	
0	0	-2	4	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	-0.6667	-0.89	1.19	
1	-1	-0.5	0.5	
1.5	-1.2	-0.32	0.26	
2	-1.3333	-0.22	0.15	
2.5	-1.4286	-0.16	0.09	
3	-1.5	-0.13	0.06	

3.5	-1.5556	-0.1	0.04	
4	-1.6	-0.08	0.03	
4.5	-1.6364	-0.07	0.02	
5	-1.6667	-0.06	0.02	
5.5	-1.6923	-0.05	0.01	
6	-1.7143	-0.04	0.01	
6.5	-1.7333	-0.04	0.01	
7	-1.75	-0.03	0.01	
7.5	-1.7647	-0.03	0.01	
8	-1.7778	-0.02	0.01	
8.5	-1.7895	-0.02	0	
9	-1.8	-0.02	0	
9.5	-1.8095	-0.02	0	
10	-1.8182	-0.02	0	

Graph: Funktion f(x)



Graph: Funktion f(x), senkrechte Asymptote x = -1, schiefe Asymptote y = -2x+2, waagerechte Asymptote y = -2



www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1306