Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = (8-2x)e^{-0,5x}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große x, auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) $x->x_1$, $x>x_1$: f(x) -> +∞, $x->x_1$, $x<x_1$: f(x) -> -∞ oder: $x->x_1$, $x>x_1$: f(x) -> -∞, $x->x_1$, $x<x_1$: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x->x_2$, $x>x_2$: f(x) -> +∞, $x->x_2$, $x<x_2$: f(x) -> +∞ oder: $x->x_2$, $x>x_2$: f(x) -> -∞, $x->x_2$, $x<x_2$: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x->x_3$: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞):
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = (8-2x)e^{-0,5x}$ ist ein Produkt aus einem ganz rationalem Faktor und einer Exponentialfunktion. Die Funktionsuntersuchung genügt folgender Vorgehensweise:

1) f(x) ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen Definitionsbereich D_f = **R**.

2) Verhalten für betragsmäßig große x: x -> -∞: f(x) -> +∞; x -> +∞: f(x) -> 0 mit y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote.

3) Symmetrie: f(x) ist weder (punkt-) symmetrisch zum Ursprung O(0|0) noch (achsen-) symmetrisch zur y-Achse x = 0 des x-y-Koordinatensystems.

4) Ableitungen: Funktion f(x) -> 1. Ableitung $f'(x) = (x-6)\cdot e^{-0.5x}$, 2. Ableitung $f''(x) = (-0.5x+4)\cdot e^{-0.5x}$, 3. Ableitung $f'''(x) = (0.25x-2.5)\cdot e^{-0.5x}$.

5) Nullstellen: $f(x) = (8-2x)\cdot e^{-0.5x} = 0$ -> $x_1 = 4$ -> Nullstelle N(4|0).

6) Tief-, Hochpunkte: $f'(x) = (x-6)\cdot e^{-0.5x} = 0$ -> $x_1 = 6$ mit: f''(6) > 0, f(6) = -0.2 -> Tiefpunkt T(6|-0.2).

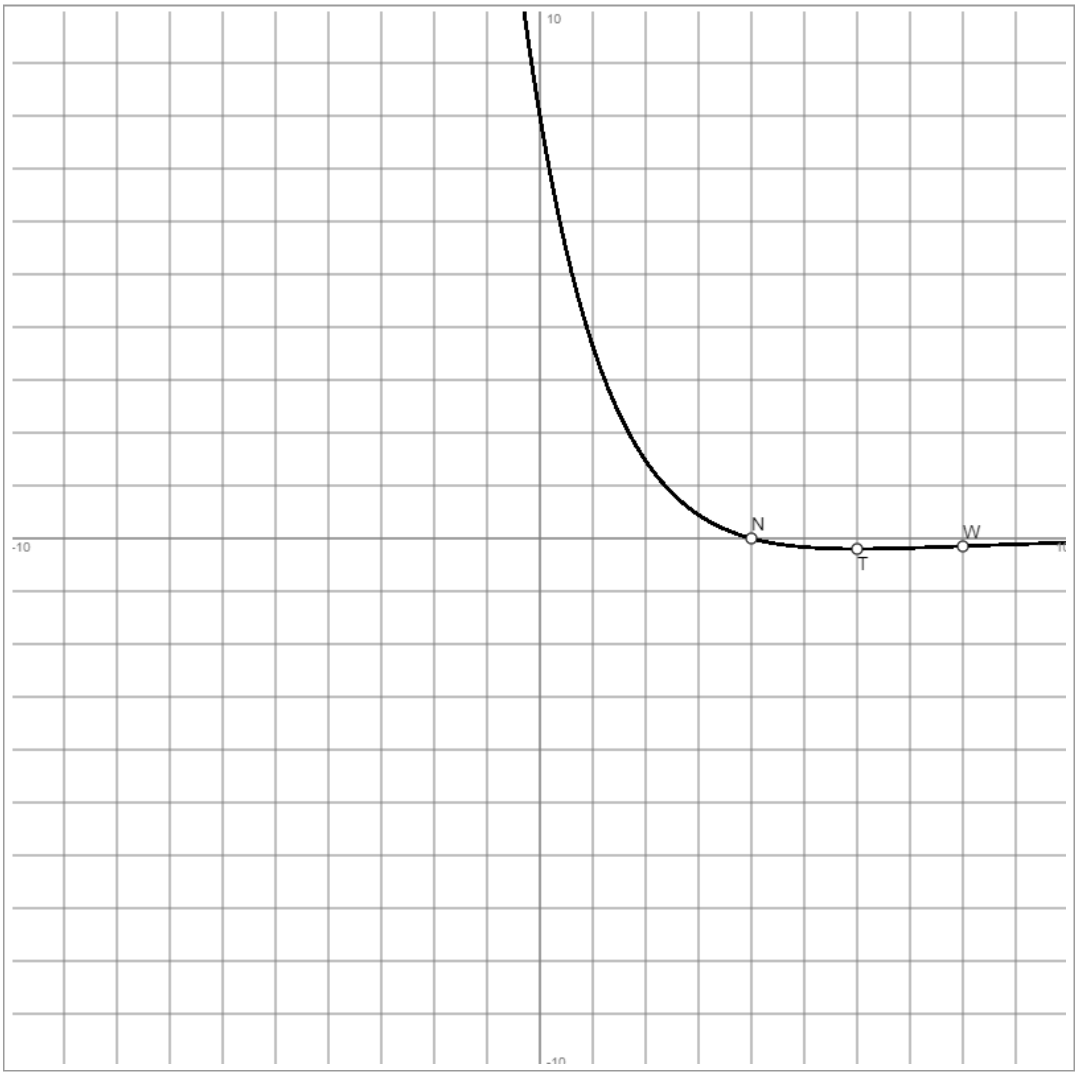
7) Wendepunkte: $f''(x) = (-0.5x+4)\cdot e^{-0.5x} = 0$ -> $x_1 = 8$ mit: f'''(8) ≠ 0, f(8) = -0.15 -> Wendepunkt W(8|-0.15).

8) Polstellen: Nicht definierte Stellen (außerhalb des maximalen Definitionsbereichs) sind nicht vorhanden.

III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	4155.5685	-2374.62	1335.72	
-9.5	3120.7757	-1791.57	1011.37	
-9	2340.4454	-1350.26	765.15	
-8.5	1752.6353	-1016.53	578.37	
-8	1310.3556	-764.38	436.79	
-7.5	977.9849	-574.04	329.54	
-7	728.5399	-430.5	248.37	
-6.5	541.5971	-322.38	186.98	
-6	401.7107	-241.03	140.6	
-5.5	297.21	-179.89	105.59	
-5	219.2849	-134.01	79.19	
-4.5	161.2915	-99.62	59.3	
-4	118.2249	-73.89	44.33	
-3.5	86.319	-54.67	33.09	
-3	62.7436	-40.34	24.65	
-2.5	45.3745	-29.67	18.32	
-2	32.6194	-21.75	13.59	
-1.5	23.287	-15.88	10.06	
-1	16.4872	-11.54	7.42	
-0.5	11.5562	-8.35	5.46	
0	8	-6	4	Schnittpunkt $S_y(0\|8)$
0.5	5.4516	-4.28	2.92	
1	3.6392	-3.03	2.12	
1.5	2.3618	-2.13	1.54	
2	1.4715	-1.47	1.1	
2.5	0.8595	-1	0.79	
3	0.4463	-0.67	0.56	
3.5	0.1738	-0.43	0.39	
4	0	-0.27	0.27	Nullstelle N(4|0)
4.5	-0.1054	-0.16	0.18	
5	-0.1642	-0.08	0.12	
5.5	-0.1918	-0.03	0.08	
6	-0.1991	0	0.05	Tiefpunkt T(6|-0.2)
6.5	-0.1939	0.02	0.03	
7	-0.1812	0.03	0.02	
7.5	-0.1646	0.04	0.01	
8	-0.1465	0.04	0	Wendepunkt W(8|-0.15)
8.5	-0.1284	0.04	0	
9	-0.1111	0.03	-0.01	
9.5	-0.0952	0.03	-0.01	
10	-0.0809	0.03	-0.01	

Graph: Funktion f(x)



www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1667