Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x - 4\ln x$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große x, auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung f'(x) = 0 lösen): f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> P_1(x_1|f(x_1)), P_2(x_2|f(x_2)), …
IV. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, x>x_1: f(x) -> +∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, x>x_1: f(x) -> -∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, x>x_2: f(x) -> +∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, x>x_2: f(x) -> -∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs:
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade	$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil, $y = e^x$, D_y = **R**:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

d) f(x) mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil; y = ln(x), D_y = (0; +∞):

x->0: ln(x) -> -∞, x-> +∞: ln(x) -> +∞
x->0: f(x) = x^aln(x) -> 0 (a>0)
x->+∞: f(x) = ln(x)/x^a -> 0 = y (a>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x-4\ln x$ ist auch eine Funktion des natürlichen Logarithmus:

1) f(x) ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen Definitionsbereich D_f = (0; +∞).

2) Verhalten an den Randstellen des Definitionsbereichs: x -> 0: f(x) -> +∞ (senkrechte Asymptote, Polstelle); x -> +∞: f(x) -> +∞.

3) Ableitungen werden nach der Potenz-, Faktor- und Summenregel gebildet: Funktion f(x) ->

1. Ableitung: $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{x}$

2. Ableitung: $f''(x)=\frac{4}{x^2}$

3. Ableitung: $f'''(x)=-\frac{8}{x^3}$.

4) Nullstellen: $f(x)=\frac{1}{2}x-4\ln x$ = 0 -> x_1 = 1.15 -> Nullstelle N(1.15|0), x_2 = 26.09 -> Nullstelle N(256.09|0).

5) Tief-, Hochpunkte: $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{x}$ = 0 -> x = 8 mit: f''(8) > 0, f(8) = -4.32 -> Tiefpunkt T(8|-4.32).

6) Wendepunkte: $f''(x)=\frac{4}{x^2}$ = 0 -> keine Lösung -> kein Wendepunkt.

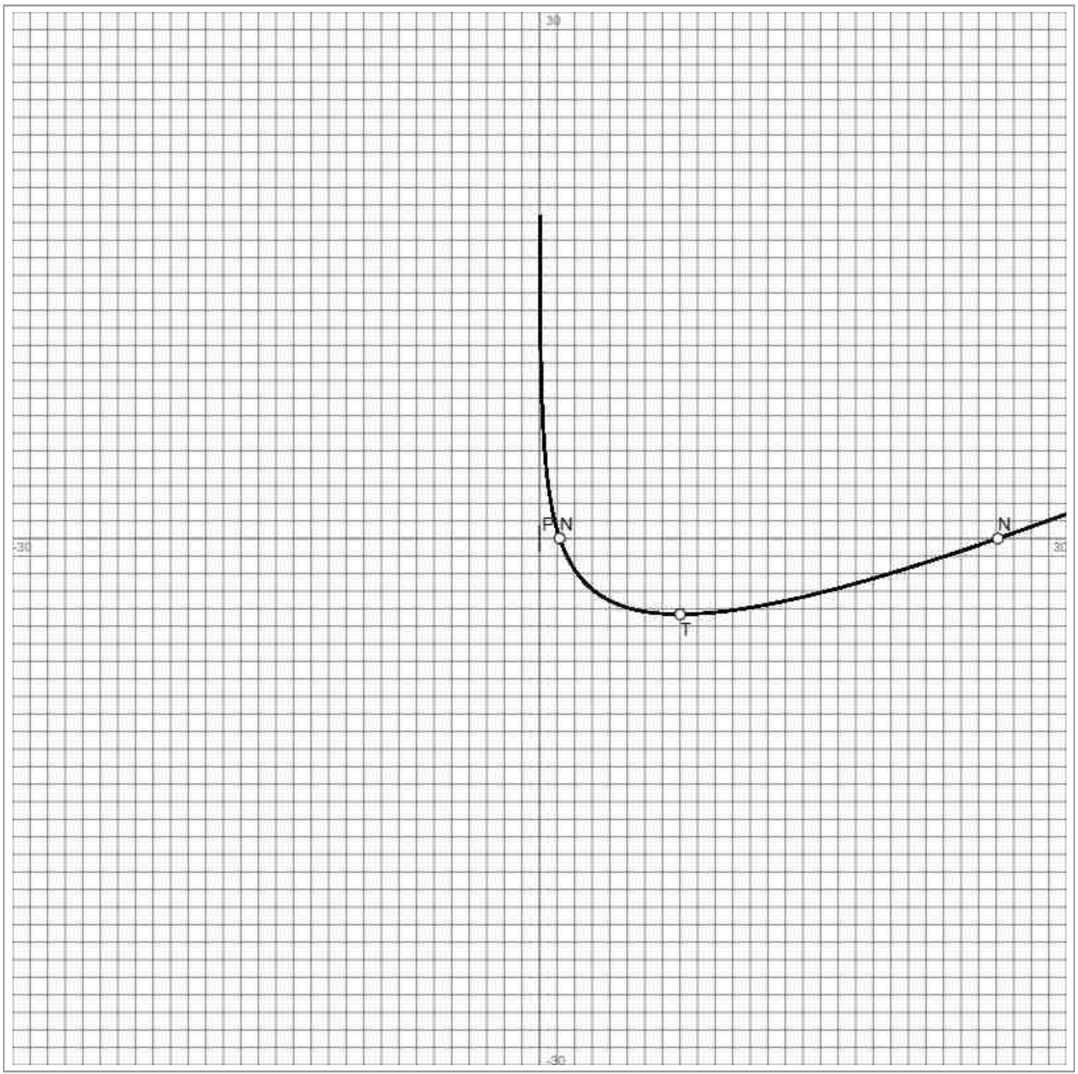
III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	Infinity	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	3.0226	-7.5	16	
1	0.5	-3.5	4	
1.15	0	-2.98	3.02	Nullstelle N(1.15|0)
1.5	-0.8719	-2.17	1.78	
2	-1.7726	-1.5	1	
2.5	-2.4152	-1.1	0.64	
3	-2.8944	-0.83	0.44	
3.5	-3.2611	-0.64	0.33	
4	-3.5452	-0.5	0.25	
4.5	-3.7663	-0.39	0.2	
5	-3.9378	-0.3	0.16	
5.5	-4.069	-0.23	0.13	
6	-4.167	-0.17	0.11	
6.5	-4.2372	-0.12	0.09	
7	-4.2836	-0.07	0.08	
7.5	-4.3096	-0.03	0.07	
8	-4.3178	0	0.06	Tiefpunkt T(8|-4.32)

8.5	-4.3103	0.03	0.06	
9	-4.2889	0.06	0.05	
9.5	-4.2552	0.08	0.04	
10	-4.2103	0.1	0.04	
10.5	-4.1555	0.12	0.04	
11	-4.0916	0.14	0.03	
11.5	-4.0194	0.15	0.03	
12	-3.9396	0.17	0.03	
12.5	-3.8529	0.18	0.03	
13	-3.7598	0.19	0.02	
13.5	-3.6608	0.2	0.02	
14	-3.5562	0.21	0.02	
14.5	-3.4466	0.22	0.02	
15	-3.3322	0.23	0.02	
15.5	-3.2134	0.24	0.02	
16	-3.0904	0.25	0.02	
16.5	-2.9634	0.26	0.01	
17	-2.8329	0.26	0.01	
17.5	-2.6988	0.27	0.01	
18	-2.5615	0.28	0.01	
18.5	-2.4211	0.28	0.01	
19	-2.2778	0.29	0.01	
19.5	-2.1317	0.29	0.01	
20	-1.9829	0.3	0.01	
20.5	-1.8317	0.3	0.01	
21	-1.6781	0.31	0.01	
21.5	-1.5222	0.31	0.01	
22	-1.3642	0.32	0.01	
22.5	-1.2041	0.32	0.01	
23	-1.042	0.33	0.01	
23.5	-0.878	0.33	0.01	
24	-0.7122	0.33	0.01	
24.5	-0.5447	0.34	0.01	
25	-0.3755	0.34	0.01	
25.5	-0.2047	0.34	0.01	
26	-0.0324	0.35	0.01	
26.09	0	0.35	0.01	Nullstelle N(26.09|0)
26.5	0.1414	0.35	0.01	
27	0.3167	0.35	0.01	
27.5	0.4933	0.35	0.01	
28	0.6712	0.36	0.01	
28.5	0.8504	0.36	0	
29	1.0308	0.36	0	
29.5	1.2124	0.36	0	
30	1.3952	0.37	0	

Graph: Funktion f(x)



www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1770