

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = 8 \cdot \frac{\ln x}{x}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große x , auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion $f(x)$ die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit Funktionsterm $y = f(x)$, D_f als maximale Definitionsmenge (als \mathbf{R} [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nenner-nullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung $f(x) = 0$ lösen): $f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow N(x_1 0), N(x_2 0), \dots$
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$; ...
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow P_1(x_1 f(x_1)), P_2(x_2 f(x_2)), \dots$
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$; ...
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge $D_f \rightarrow$ Randstellen der Definitionsmenge $D_f \Rightarrow$ Definitionslücken $x_1, x_2, x_3 \dots$ b) $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow -\infty$ oder: $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow x_1$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow +\infty$ oder: $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow x_2$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x \rightarrow x_3: f(x) \rightarrow r \Rightarrow x_3$ (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$); ... – Monotonieintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$)
Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0) > 0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0) < 0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$); ...

– Krümmungsintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:

a) Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$ (gerade)

b) Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ (ungerade)

c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.

d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.

d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.

e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion $f(x)$: $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw.; $f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.

f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x ($x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs:

a) $f(x)$ als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n > 0$	n ungerade	n gerade	$a_n < 0$	n ungerade	n gerade
$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$

b) $f(x)$ als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

$x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow 0 = y$ ($n < m$)

$x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow a/b = y$ ($n = m$; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)

$x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ($n > m$)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) $f(x)$ mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil, $y = e^x$, $D_y = \mathbf{R}$:

$x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$: $e^x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow -\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow \pm\infty$ ($b < 0$), $\rightarrow d = y$ ($b > 0$); $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow d = y$ ($b < 0$), $\rightarrow \pm\infty$ ($b > 0$)

$x \rightarrow -\infty$: $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow \pm\infty$ ($b < 0$), $\rightarrow 0 = y$ ($b > 0$); $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow 0 = y$ ($b < 0$), $\rightarrow \pm\infty$ ($b > 0$)

mit y als waagerechter Asymptote.

d) $f(x)$ mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil; $y = \ln(x)$, $D_y = (0; +\infty)$:

$x \rightarrow 0$: $\ln(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$: $\ln(x) \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow 0$: $f(x) = x^a \ln(x) \rightarrow 0$ ($a > 0$)

$x \rightarrow +\infty$: $f(x) = \ln(x)/x^a \rightarrow 0 = y$ ($a > 0$)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = 8 \cdot \frac{\ln x}{x} = 8x^{-1} \ln x$ ist auch eine Funktion des natürlichen Logarithmus:

1) $f(x)$ ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen Definitionsbereich $D_f = (0; +\infty)$.

2) Verhalten an den Randstellen des Definitionsbereichs: $x \rightarrow 0$: $f(x) \rightarrow -\infty$ (senkrechte Asymptote, Pol); $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow 0 = y$ (als waagerechte Asymptote).

3) Ableitungen werden nach der Potenz-, Faktor- und Produktregel gebildet: Funktion $f(x) \rightarrow$

1. Ableitung: $f'(x) = -8x^{-2} \ln x + 8x^{-1} \cdot \frac{1}{x} = -8x^{-2} \ln x + 8x^{-2} = -8x^{-2}(\ln x - 1)$

2. Ableitung: $f''(x) = 16x^{-3}(\ln x - 1) - 8x^{-2} \cdot \frac{1}{x} = 16x^{-3}(\ln x - 1) - 8x^{-3} = 8x^{-3}(2 \ln x - 3)$

3. Ableitung: $f'''(x) = -24x^{-4}(2 \ln x - 3) + 8x^{-3} \cdot \frac{2}{x} = -24x^{-4}(2 \ln x - 3) + 16x^{-4} = -8x^{-4}(6 \ln x - 7)$.

4) Nullstellen: $f(x) = 8 \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ Nullstelle $N(1|0)$.

5) Tief-, Hochpunkte: $f'(x) = -8x^{-2}(\ln x - 1) = 0 \rightarrow x = e$ mit: $f''(e) < 0$, $f(e) = 8/e \rightarrow$ Tiefpunkt $T(e|8/e)$.

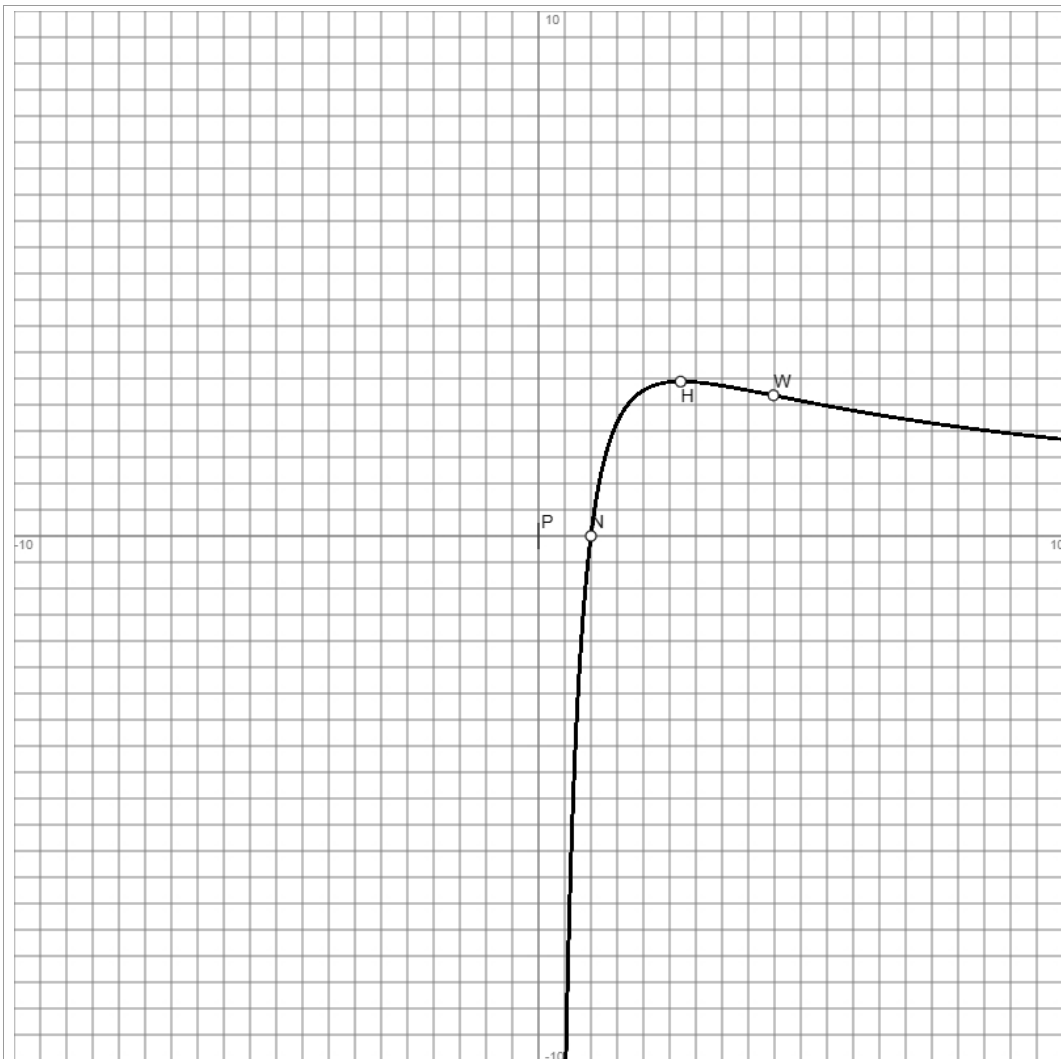
6) Wendepunkte: $f''(x) = 8x^{-3}(2 \ln x - 3) = 0 \rightarrow x = e^{3/2}$ mit: $f'''(e^{3/2}) \neq 0$, $f(e^{3/2}) = 12/e^{3/2} \rightarrow$ Wendepunkt $W(e^{3/2}|12/e^{3/2})$.

III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-Infinity	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 0$
0.5	-11.0904	54.21	-280.87	
1	0	8	-24	Nullstelle $N(1 0)$
1.5	2.1625	2.11	-5.19	
2	2.7726	0.61	-1.61	
2.5	2.9321	0.11	-0.6	
2.71	2.943	0	-0.4	Hochpunkt $H(2.71 2.94)$
3	2.9296	-0.09	-0.24	
3.5	2.8635	-0.17	-0.09	
4	2.7726	-0.19	-0.03	
4.48	2.6779	-0.2	0	Wendepunkt $W(4.48 2.68)$
4.5	2.6739	-0.2	0	
5	2.5751	-0.2	0.01	
5.5	2.4796	-0.19	0.02	
6	2.389	-0.18	0.02	
6.5	2.3038	-0.17	0.02	
7	2.2239	-0.15	0.02	
7.5	2.1492	-0.14	0.02	

8	2.0794	-0.13	0.02	
8.5	2.0142	-0.13	0.02	
9	1.9531	-0.12	0.02	
9.5	1.8958	-0.11	0.01	
10	1.8421	-0.1	0.01	

Graph: Funktion $f(x)$



www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1772